1. Funkcije više promenljivih

1. Granične vrednosti funkcija više promenljivih

Definicija 1. Funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ ima graničnu vrednost u tački $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D'$ i jednaka je broju $\alpha \in \mathbf{R}$ ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\Big(\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)(\in D) \neq (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\Big)$$
$$||(x_1, \dots, x_n) - (x_1^0, \dots, x_n^0)|| < \delta \Rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - \alpha| < \varepsilon$$

Tada pišemo

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \to (x_1^0, \dots, x_n^0)} f(x_1 \dots, x_n) = \alpha$$

i ovu graničnu vrednost nazivamo n-limesom u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Ako je $n = 2$ limes nazivano dvojnim (dvostrukim).$\square$

Definicija 2. Za funkciju $f : D(\subset R^n) \to R$ definišemo ponovljene granične vrednosti na sledeći način

$$\lim_{x_{i(n)} \to x_{i(n)}^0} \lim_{x_{i(n-1)} \to x_{i(n-1)}^0} \cdots \lim_{x_{i(1)} \to x_{i(1)}^0} f(x_1 \dots, x_n)$$

i ima ih $n!$ jer niz $i(1), i(2) \dots, i(n) \in \mathcal{P}\{1, 2, \dots, n\}$ $\square$

Primer: Za funkciju tri promenljive $f(x, y, z) : R^3 \to R$ u tački (x_0, y_0, z_0) posmatramo sledeće granične vrednosti

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z)$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z); \qquad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\lim_{z\to z_0} f(x,y,z)$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{z\to z_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y,z); \qquad \lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y,z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y,z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y,z) \quad \square$$

Postavlja se pitanje odnosa n-limesa i ponovljenih limesa. Pre formalnog dokaza stavova koji ilustuju ovaj odnos navodimo jedan primer.

Primer 1. Za funkciju $f(x,y) = x\sin(\frac{1}{y})$ imamo da je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, dok $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\sin(\frac{1}{y})$ ne postoji.

Dakle zbog prethodnog primera vidimo da postojanje n-limesa (u ovom slučaju dvojnog) ne povlači postojanje ponovljenih limesa.

Tvrđenje 1. (Hajne - Borelova definicija granične vrednosti)
(1) $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1\dots,x_n) = \alpha$ ako i samo ako važi za svaki niz
(2) $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (x_1^0,\dots,x_n^0)$ važi da (3) $f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$

Dokaz: (Uslov je potreban) Neka važi (1) i neka za niz $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)_{k\in N}$ važi (2). Tada imamo da je:

iz (1): $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0)(\forall(x_1,\dots,x_n) \neq (x_1^0,\dots,x_n^0))$
$||(x_1,\dots,x_n) - (x_1^0,\dots,x_n^0)|| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1,\dots,x_n) - \alpha| < \varepsilon \quad (I)$

iz (2) $(\forall\delta_1 > 0)(\exists k_0 \in N) k \geqslant k_0 \Rightarrow ||(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - (x_1^0,\dots,x_n^0)|| < \delta_1 \quad (II)$

iz (I) i (II) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in N) k \geqslant k_0 \Rightarrow |f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - \alpha| < \varepsilon$
što znači da važi (3).

(Uslov je dovoljan) Za dokaz obrnutog stava koristimo kontrapoziciju koja je iskazana logičkom formulom $B \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$.
Tačnije pokazaćemo da iz (4): $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1\dots,x_n) \neq \alpha$ sledi da postoji niz $(x_1^k,\dots,x_n^k) \to (x_1^0,\dots,x_n^0)$ a da pritom $f(x_1^k,\dots,x_n^k) \not\to \alpha$.
Zaista, ako važi (4) tada

$$(I') \quad \Big(\exists \varepsilon > 0\Big)\Big(\forall \delta = \frac{1}{k}\Big)\Big(\exists (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \neq (x_1^0, \ldots, x_n^0)\Big)$$
$$||(x_1^k, \ldots, x_n^k) - (x_1^0, \ldots, x_n^0)|| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_1^k, \ldots, x_n^k) - \alpha| \geqslant \varepsilon$$

Upravo ovako konstruisan niz zadovoljava negaciju. $\square$

Primer 2. Ispitati postojanje dvojnog i ponovljenih limesa za funkciju $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ u tački $(0,0)$.

Rešnje:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 1$$
$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = -1,$$

dok dvojni limes ne postoji jer za nizove $z_k^1 = (\frac{2}{k}, \frac{1}{k})$ i $z_k^2 = (\frac{3}{k}, \frac{4}{k})$ koji konvergiraju ka graničnoj tački $(0,0)$, važi da nizovi njihovih slika konvergiraju ka $f(z_k^1) \to \frac{1}{3}, \quad f(z_k^2) \to -\frac{1}{7}$, a pošto je granična vrednost jedinstveno određena sledi da dvojni limes ne postoji. $\square$

Teoremu o odnosu ponovljenih i dvojnog limesa pokazaćemo razmatrajući funkcije dve promenljive.

Teorema 1. (Dovoljni uslovi za postojanje ponovljenog limesa, ako postoji dvojni) Neka $f : D(\subset R^2) \to R$ i neka je $(x_0, y_0) \in D'$ tačka nagomilavanja domena funkcije. Ako

$a)$ postoji $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \alpha$

$b)$ za svako $y \in R$ postoji $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = \psi(y)$

tada posoji ponovljeni limes $\displaystyle\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$ i jednak je dvojnom.

Dokaz: Iz $a)$ sledi da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y)(\in D) \neq (x_0,y_0))$$
$$||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$$

Puštajući da $x \to x_0$, zbog neprekidnosti funkcije apsolutne vrednosti dobijamo da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y)(\in D) \neq (x_0,y_0))$$
$$||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta \Rightarrow |\lim_{x \to x_0} f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y)|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\psi(y) - \alpha| < \varepsilon,$$

što znači da je $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = \alpha$

Definicija 3. Uniformna granična vrednost.

Neka $f : A \times B \to R, (A, B \subset R,\ \ A, B \neq \emptyset)$. Neka je $(x_0, y_0) \in A' \times B'$ tačka nagomilavanja. Tada kažemo da $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ postoji uniformno po x ako važi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in B) 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow (\forall x \in A)|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, dakle $\delta = \delta(\varepsilon)$ ne zavisi od izbora x.

Teorema o razmeni dva limesa (Moore-ova teorema)

Neka $f : A \times B \to R, (A, B \subseteq R,\ \ A, B \neq \emptyset)$ i $(x_0, y_0) \in A' \times B'$. Ako važi

a) $(\forall y \in B)$ postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$

b) $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ uniformno po x na skupu A,

tada postoje oba poovljena limesa kao i dvojni i svi su međusobno jednaki.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da postoji $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ pa će ostali deo tvrđenja teoreme slediti iz prethodne teoreme.

Zbog *a*) važi:
(*i*) $(\forall y \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in A) 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - \psi(y)| < \frac{\varepsilon}{6}$

Zbog *b*) važi:
(*ii*) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall y \in B) 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow (\forall x \in A)|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$

Dokazaćemo da funkcija zadovoljava Cauchy-ev uslov za postojanje limesa, odakle će zbog kompletnosti prostora R^2 slediti tvđenje.

Neka su (x', y') i $(x", y")$ elementi takvi da je $|x' - x_0| < \delta$, $|x" - x_0| < \delta$ i $|y' - y_0| < \delta$, $|y" - y_0| < \delta$, pri čemu $(x', y'), (x", y") \in A \times B$ i $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za proizvoljno fiksirano $\hat{y} \in B$ važi da je

$$|f(x', y') - f(x", y")| \leqslant |f(x', y') - f(x', \hat{y})| + |f(x', \hat{y}) - f(x", y")| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x', y') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - f(x', \hat{y})| + |f(x', \hat{y}) - f(x", y") \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + |f(x', \hat{y}) - f(x", y")| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{6} + |f(x', \hat{y}) - \psi(\hat{y})| + (\psi(\hat{y}) - f(x", \hat{y})| + |f(x", \hat{y}) - \varphi(x")| + |\varphi(x") - f(x", y")| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Dodatno objašnjenje: CAUCHYev uslov postojanja dvojnog limesa.
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x', y')(\neq (x_0, y_0)), (x", y")(\neq (x_0, y_0)) \in D)$
$||(x', y') - (x_0, y_0)|| < \delta \ ||(x", y") - (x_0, y_0)|| < \delta \Rightarrow |f(x', y') - f(x", y")| < \varepsilon$

U našem slučaju imamo da za $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ važi da je:
$|x' - x_0|, |y' - y_0| < ||(x', y') - (x_0, y_0)|| < \delta$
$|x" - x_0|, |y" - y_0| < ||(x", y") - (x_0, y_0)|| < \delta$

Dakle, važi CAUCHY-ev uslov konvergencije, te dvojni limes postoji. □

2. Neprekidnost funkcija više promenljivih

Definicija 4. Funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ neprekidna je u fiksiranoj tački $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x, y) \in D)||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Tvrđenje 2. (Hajne Borelova definicija neprekidnosti) Funkcija $f : R^n \to R$ neprekidna je u tački $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ako i samo ako za svaki niz $(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)_{k\in N}$, takav da $(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ važi da niz njegovih slika $f(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Dokaz: Dokaz tvrđenja sličan je dokazu Tvrđenja 1.

Definicija 5. Funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ ravnomerno je neprekidna na nekom skupu $E \subseteq D$ ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x_1', \ldots, x_n'), (x_1", \ldots, x_n") \in E)$$
$$||(x_1', \ldots, x_n') - (x_1", \ldots, x_n")|| < \delta \Rightarrow |f((x_1', \ldots, x_n')) - f((x_1", \ldots, x_n"))| < \varepsilon$$

Primer 1. Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rešenje: Za $(x, y) \neq (0, 0)$ funkcija je neprekidna kao superpozicija neprekidnih. U tački $(0, 0)$ funkcija nije neprekidna. Uočimo niz $z_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0, 0)$, dok niz njegovih slika $f(z_n) \to 1 \neq 0 = f(0, 0)$ te nije zadovoljen uslov Tvrđenja 1, odnosno funkcija u tački $(0, 0)$ ima prekid.

Tvrđenje 3. (Hajne-Borelova definicija ravnomerne neprekidnosti) Funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ ravnomerno je neprekidna na skupu $E \subset D$ ako važi: Za svaka dva niza $(x_1'^k, x_2'^k, \ldots, x_n'^k)_{k\in N}$ i $(x_1"^k, x_2"^k, \ldots, x_n"^k)_{k\in N}$ takva da $||(x_1'^k, x_2'^k, \ldots, x_n'^k) - (x_1"^k, x_2"^k, \ldots, x_n"^k)|| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ važi da
$|f(x_1'^k, \ldots, x_n'^k) - f(x_1"^k, \ldots, x_n"^k)| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
odnosno dovoljno bliski nizovi slikaju se u dovoljno bliske nizove. □

Primer 2. Ispitati ravnomernu neprekidnost funkcije

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

Rešenje: Dokazaćemo da funkcija nije ravnomerno neprekidna (obično, kao superpozicija neprekidnih funkcija ona jeste neprekidna). Uočimo nizove

$$z_n^1 = (\sqrt{2n\pi}, \sqrt{2n\pi}, \sqrt{2n\pi})$$
$$z_n^2 = (\sqrt{\pi + 2n\pi}, \sqrt{\pi + 2n\pi}, \sqrt{\pi + 2n\pi})$$

Dati nizovi su dovoljno bliski jer

$$\begin{aligned} ||z_n^1 - z_n^2|| &= \sqrt{3}(\sqrt{\pi + 2n\pi} - \sqrt{\pi}) \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{\pi + 2n\pi} + \sqrt{\pi}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

S druge strane

$$f(z_n^1) - f(z_n^2)| = |\cos(6n\pi) - \cos(3\pi + 6n\pi)| = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ nizovi slika nisu dovoljno bliski.

Rešenje ovog primera zasniva se na Hajne-Borelovoj definiciji ravnomerne neprekidnosti.

3. Diferencijabilnost funkcija više promenljivih

3.1. Parcijalni izvodi funkcije više promenljivih

Definicija 6. Neka je $f : D(\subset R^n) \to R$, D otvoren skup i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardna baza prostora R^n. Parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_i u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ definišemo pomoću

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_1^0, \ldots, x_n^0) + he_i) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

Čak i više ako je $\vec{v}$ proizvoljan vektor $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, tada izvod u pravcu vektora $\vec{v}$, u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ definišemo pomoću

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_1^0, \ldots, x_n^0) + h(v_1, \ldots, v_n)) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

Dakle, parcijalni izvodi su obični izvodi po nekoj od promenljivih nad kojima je funkcija definisana i važe sva pravila kod funkcija jedne promenljive. □

3.2. Diferencijabilnost funkcija više promenljivih

Definicija 7. Neka je $f : D(\subset R^n) \to R$ i D otvoren skup. Preslikavanje f je diferencijabilno u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ako postoji linearna funkcija $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}(R^n, R)$ takva da važi

$$\lim_{\substack{||h|| \to 0 \\ (h_1, \ldots, h_n) \to (0, \ldots, 0)}} \frac{|f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) - A(x_1^0, \ldots, x_n^0)(h_1, \ldots, h_n)|}{||h||} = 0$$

Vrednost $A(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ nazivamo izvodom funkcije f u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ i označavamo sa $f'(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. □

Napomena: Ako je funkcija f diferencijabilna u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tada se priraštaj funkcije u toj tački može napisati kao

$$f((x_1^0, \ldots, x_n^0) + (h_1, \ldots, h_n)) - A(x_1^0, \ldots, x_n^0)(h) \equiv u(h)$$

gde važi da je

$$(5) \qquad \lim_{||h|| \to 0} \frac{|u(h)|}{||h||} = 0 \quad (h = (h_1, \ldots, h_n))$$

Tvrđenje 4. Ako je funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ diferencijabilna u tački $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ tada je ona u toj tački neprekidna.

Dokaz: Označimo sa $x^0 \equiv (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, a $h \equiv (h_1, \ldots, h_n)$. Imamo da

$$|f(x^0 + h) - f(x^0)| = |A(x^0)(h) + u(h)| \leqslant ||A(x^0)|| \cdot ||h|| + |u(h)| \underset{||h|| \to 0}{\longrightarrow} 0$$

{objašnjenje: iz (5) sledi da je i $\lim_{||h|| \to 0} |u(h)| = 0$}.

Primer: Za funkciju $f(x, y) = x^2 + y^2 \ : \ R^2 \to R$ odredimo izvodnu funkciju.

Neka je $A(x,y)$ izvodna funkcija. Tada imamo da je

$$A(x,y) \circ h = [a,b] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = ah_1 + bh_2,$$

pri čemu mora važiti

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - A(x,y) \circ h|}{||h||} = 0.$$

Kako je prethodni uslov ekvivalentan sa

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{|(x+h_1)^2 + (y+h_2)^2 - x^2 - y^2 - ah_1 - bh_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{|2xh_1 + h_1^2 + 2yh_2 + h_2^2 - ah_1 - bh_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{|(2x-a)h_1 + (2y-b)h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \lim_{h \to 0} \frac{|h_1^2 + h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

dobijamo da mora važiti $a = 2x$, $b = 2y$, jer u suprotnom prva granična vrednost ne bi bila 0 pošto bi beskonačno male veličine brojioca i imenioca bile istog reda za $a \neq 2x$ ili $b \neq 2y$. Dakle, $A(x,y) = [2x, 2y]$ je izvod funkcije.

Tvrđenje 5. Ako je $f : R^n \to R$ diferencijabilna funkcija, tada je njen izvod $A(x)$ jedinstven. $(x \equiv (x_1, \ldots, x_n))$

Dokaz: Pretpostavimo da postoje dva izvoda funkcije f, označeni sa $A_1(x)$ i $A_2(x)$, pri čemu $A_1(x)$, $A_2(x) \in \mathcal{L}(R^n, R)$. Posmatrajmo

$$\begin{aligned} B(x) \circ h &= A_1(x) \circ (h) - A_2(x) \circ (h) = \\ &= [f(x+h) - f(x) - A_2(x) \circ (h)] - [f(x+h) - f(x) - A_1(x) \circ (h)] = \\ &= u_2(h) - u_1(h) \end{aligned}$$

Kako je $\dfrac{|B(x)(h)|}{||h||} = \dfrac{|u_2(h) - u_1(h)|}{||h||} \leqslant \dfrac{|u_2(h)|}{||h||} + \dfrac{|u_1(h)|}{||h||} \to 0$, a funkcija $B(x) \circ h$ je linearna, odnosno važi $\dfrac{|B(x)(th)|}{||th||} = \dfrac{|B(x)(h)|}{||h||} \to 0$ za svako $t > 0$, tada je $||B(x) \circ h|| = 0 \Rightarrow B(x) \circ h = 0$, za svako $h \in R^n$

Teorema o potrebnim uslovima diferencijabilnosti. Neka je funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ diferencijabilna u tački $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$. Tada postoje parcijalni izvodi, po svim promenljivim, u toj tački.

Dokaz: Čak i više, dokazaćemo da ako je funkcija diferencijabilna i $\vec{v}$

proizvoljan vektor takav da $\vec{v} \in R^n \backslash \{(0,\dots,0)\}$, tada postoji izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{v}$. Zaista, ako je funkcija diferencijabilna tada važi:

$$\begin{aligned}
& \lim_{||v|| \to 0} \frac{|f(x^0+v)-f(x^0)-f'(x^0)(v)|}{||h||} && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{||hv|| \to 0} \frac{|f(x^0+hv)-f(x^0)-f'(x^0)(hv)|}{||hv||} && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{||v||} \lim_{||h|| \to 0} \frac{|f(x^0+hv)-f(x^0)-hf'(x^0)(v)|}{|h|} && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{||h|| \to 0} |\frac{f(x^0+hv)-f(x^0)}{h} - f'_{(x^0)}(v)| && = 0
\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x^0+hv)-f(x^0)}{h} = f'(x^0)(v)$

Specijalno ako je $\vec{v} = e_i$ ($i = \overline{1,\dots,n}$) dobijamo da postoje parcijalni izvodi. $\square$

Zaključak: Dakle, ako je funkcija diferencijabilna tada postoje parcijalni izvodi i pritom važi

$$f'_{(x^0)} = \Big[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\Big]$$

Obrnuto ne mora da važi, tj. iz postojanja parcijalnih izvoda ne sledi diferencijabilnost funkcije, što pokazuje sledeći primer.

Primer: Ispitati diferencijabilnost funkcije

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

u tački $(0,0)$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} &= 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} &= 0
\end{aligned}$$

Ako bi funkcija bila diferencijabilna tada važi

$$\lim_{\substack{||h|| \to 0 \\ h=(h_1,h_2)}} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - 1 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{h \to 0} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} = 0$$

što nije tačno jer za niz $z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (0,0)$ imamo da

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{2^{\,3/2}\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \neq 0 \quad \square$$

Teorema o dovoljnim uslovima diferencijabilnosti. Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ i neka je D otvoren skup. Tada važi: f je neprekidno diferencijabilna na D ako i samo ako postoje parcijalni izvodi na D i neprekidne su funkcije. $\square$

Objašnjenje: Postojanje neprekidnih parcijalnih izvoda je dovoljan, ali ne i potreban uslov diferencijabilnosti jer pored diferencijabilnosti on obezbeđuje i neprekidnost izvodne funkcije.

Geometrijska interpretacija izvoda: Ako je jednačinom $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ zadana površ u R^n tada n-torka

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)(x_1^0 \ldots, x_n^0)$$

predstavlja normalan vektor na tangentnu ravan površi zadane gornjom jednačinom u tački $(x_1^0 \ldots, x_n^0)$.

3.3. Parcijalni izvodi višeg reda

Definicija 8. Parcijalni izvodi višeg reda definišu se rekurentno na sledeći način

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i(k)} \partial x_{i(k-1)}, \ldots, \partial x_{i(1)}} = \frac{\partial}{\partial x_{i(k)}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i(k-1)}, \ldots, \partial x_{i(1)}}\right)$$

gde je $i(k), i(k-1), \ldots, i(1)$ niz elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji odgovaraju varijacijama od n elemenata k-te klase sa ponavljanjem. Dakle ima ih $\overline{V}_n^k = n^k \leftarrow$ Broj parcijalnih izvoda k-tog reda funkcije od n promenljivih.

Primer: Za funkciju $f : R^2 \to R$ koja ima prezentaciju $f = f(x,y)$ postoje sledeći parcijalni izvodi drugog reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leftarrow \text{ponovljeni parcijalni izvodi}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leftarrow \text{mešoviti parcijalni izvodi}$$

Postavlja se pitanje jednakosti mešovitih parcijalnih izvoda? U cilju dokazivanja glavnog tvrđenja koje daje odgovor na prethodno pitanje dokažimo jednu lemu:

Lema 1. Neka je $D \subset R^2$ otvoren skup koji sadrži tačku $(0,0)$ i neka je $f : D \to R$ funkcija koja ima parcijalne izvode na D. Neka je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ neprekidna funkcija u $(0,0)$. Ako je

$$A(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0)$$

tada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{A(h,k)}{hk}$$

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ neprekidna funkcija tada važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|h| < \delta \text{ i } |k| < \delta) \Rightarrow \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h,k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\Big| < \varepsilon$$

Posmatrajmo funkciju $B(h) = f(h,k) - f(h,0)$, za koju važi $A(h,k) = B(h) - B(0)$. $B(h)$ je diferencijabilna funkcija i važi

$$\begin{aligned}
(6) \quad B'(h) &= \lim_{t \to 0} \frac{B(h+t) - B(h)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(h+t,k) - f(h,k)}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{f(h+t,0) - f(h,0)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(h,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(h,0)
\end{aligned}$$

Na intervalu $|h| < \delta$ peimenimo LAGRANGE-ovu teoremu o srednjoj vrednosti za funkciju $A(h,k)$ kada je posmatramo kao funkciju po prvoj kordinati. Dobijamo:

$$\begin{aligned}
&A(h,k) - A(0,k) = A_h(h_0,k)(h-0) \\
\Rightarrow \quad &A(h,k) \overset{\substack{zbog \\ (6)}}{=} h\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(h_0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(h_0,0)\Big],
\end{aligned}$$

za $0 < |h_0| < |h|$. Na poslednju jednakost primenimo još jednom LAGRANGE-ovu teoremu o srednjoj vrednosti, ali po drugoj koordinati k. Dobijamo da je

$$A(h,k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0)\ ,\ \text{za}\ \ 0 < |k_0| < |k|,$$

odnosno

$$\frac{A(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0).$$

Dakle za svaki par (h,k) postoji par (h_0,k_0) takav da je

$$\Big|\frac{A(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0)\Big| < \varepsilon$$

odnosno

$$\lim_{h,\,k\,\to\,0}\frac{A(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Teorema o jednakosti mešovitih parcijalnih izvoda. Neka je $f : D(\subset R^n) \to R$, D otvorena okolina tačke (x^0, y^0) i neka $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ postoje na okolini D. Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ neprekidna funkcija u tački (x^0,y^0) tada postoji u toj tački $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i važi da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0,y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0,y^0).$$

Dokaz: Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $(x^0,y^0) = (0,0)$. Zbog prethodne leme imamo da je

$$(7)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{(h,\,k)\,\to\,(0,\,0)}\frac{A(h,k)}{hk},$$

odnosno

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ 0 < |h| < \delta \land 0 < |k| < \delta \Rightarrow \Big|\frac{A(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\Big| < \varepsilon.$$

S druge strane imamo da je

$$
\begin{aligned}
(8)\ \lim_{k\to 0}\frac{A(h,k)}{hk} &= \frac{1}{h}\lim_{k\to 0}\Big[\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}-\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\Big]\\
&= \frac{1}{h}\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big].
\end{aligned}
$$

Zbog (7) imamo da je

$$
(9)\quad \Big|\lim_{k\to 0}\frac{A(h,k)}{hk}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\Big|<\varepsilon
$$

(Granična vrednost ne zavisi od pravca)

odakle zbog (8) sledi da je za $0<|h|<\delta$ ispunjeno

$$
\Big|\frac{1}{h}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\Big|<\varepsilon
$$

Uzimajući $\lim\limits_{h\to 0}$ u prethodnom uslovu dobijamo da je

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0), \text{ što je trebalo dokazati.}
$$

4.Tajlorova formula funkcija više promenljivih

Neka je $D\subset R^n$ i neka funkcija $f: D\to R$, tako da za tačke $a,b\in D$ važi da je duž koja ih spaja cela u oblasti D. Posmatrajmo funkciju $\varphi(t)=f(a+th),\quad t\in[0,1]$, za $h=t-a$

Odredimo $\varphi^m(t)$.

$$
\begin{aligned}
\underline{m=1:}\quad \varphi'(t) &= f'(a+th)\cdot h =\\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a+th)\Big)\begin{bmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix} =\\
&= \Big(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)(a+th)\\
&= \Big(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)f(a+th)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{m=2:}\quad \varphi''(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi'(t)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th) = \\
&= \Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^2 f(a+th)
\end{aligned}
$$

Napomena: 2 u stepenu poslednjeg izraza predstavlja red parcijalnog izvoda, a pri ovakvom zapisu važe sva pravila stepenovanja. Izraz sa 2 u stepenu dejstvuje na funkciju f u tački $(a+th)$.

Konačno

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(m)}(t) &= \underbrace{\Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^m}\, f(a+th) \\
&\equiv D^m f(a+th)(h)^m \\
&\equiv f^{(m)}(a+th)(h)^m
\end{aligned}
$$

Tajlorova formula. Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ i neka tačka $a \in D$. Neka je $f \in C^n(D)$ i neka je tačka $b \in D$ takva da duž koja spaja tačke a i b cela leži u D. Tada važi Taylor-ova formula

$$
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \\
&+ \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \\
&+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^n
\end{aligned}
$$

za neko $c = a + t_0 b$, $t \in [0,1]$.

$\{$ Izraz $f^{(k)}(a)(b-a)^k = \Big((b_1-a_1)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (b_n-a_n)\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)^k f(a)$ $\}$.

Dokaz. Posmatrajmo pomoćnu funkciju $\varphi(t) = f(a+th) : [0,1] \to \overline{ab} \subset D$ gde je sa $\overline{ab}$ označena duž koja spaja tačke a i b. Na osnovu Taylorove formule za funkciju jedne promenljive imamo da važi:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(0)+\frac{1}{1!}\varphi'(0)(1-0)+\\ &+\frac{1}{2!}\varphi''(0)(1-0)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)(1-0)^{n-1}+\\ &+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(t_0)(1-0)^n.\end{aligned}$$

Zbog uvodnog dela u ovom poglavlju dobijamo:

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)h+\\ &+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)h^{n-1}+\\ &+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)h^n, \quad (h=b-a).\end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen.

Primer: Funkciju $f(x,y)=e^{x-y}$ predstaviti MACLAURINovim polinomom drugog stepena.

Rešenje:

$$\begin{aligned}&f(0,0)=1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_f(x,y) &= 1+\frac{1}{1!}\Big(1\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)\Big)+\\ &+\frac{1}{2!}\Big(1\cdot(x-0)^2-2(x-0)(y-0)+1\cdot(y-0)\Big)=\\ &= 1+x-y+\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2 \quad \square\end{aligned}$$

5. Ekstremumi funkcija više promenljivih

Definicija 9.
a) Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$. Tača $c \in D$ je tačka globalnog maksimuma (minimuma) preslikavanja f ukoliko je $f(c) \geqslant f(x)$ $(f(c) \leqslant f(x))$ za svako $x \in D$. Ako su nejednakosti stroge tačka c je tačka strogog maksimuma (minimuma).

$b)$ Funkcija f ima u tači c lokalni maksimum (minimum) ukoliko postoji okolina $\mathcal{U}$ tačke c takva da restrikcija funkcije f na skup $\mathcal{U}$ ima maksimum (minimum).

Tvrđenje 6. Ako $f : D(\subset R^n) \to R$ u tački $c \in D$ ima (lokalni) ekstremum i ako je u toj tački diferencijabilna tada je $f'(c) = 0$, odnosno svi parcijalni izvodi funkcije f u tački c su 0.

Dokaz: Posmatrajmo funkcije

$$\psi_i(x_i) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$$

za sve funkcije $i = 1, \ldots, n$. Kako su date funkcije restrikcije funkcije f na skup $D \cap (\{c_1\} \times \{c_2\} \times \cdots \times \{c_{i-1}\} \times R \times \{c_{i+1}\} \times \cdots \times \{c_n\})$ one u tački c_i imaju (lokalni) ekstremum. Na osnovu Fermatove teoreme imamo da je $\psi_i'(c_i) = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$, odnosno $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \psi_i'(c_i) = 0$.

Definicija 10. Ako je $f'(c) = 0$ tada se c naziva stacionarnom tačkom.

5.1. Bezuslovne ekstremne vrednosti

Teorema o dovoljnim uslovima postojanja bezuslovnog ekstremuma. Neka funkcija $f : D(\subset R^n) \to R$ i neka je $c \in D$ unutrašnja tačka. Ako je tačka c stacionarna i ako su drugi parcijalni izvodi neprekidni u nekoj okolini tačke c, tada važi:

$a)$ Ako je $f''(c)(h)^2 > 0$ za svako $h \neq 0$ tada f ima (lokalni) minimum u tački c.

$b)$ Ako je $f''(c)(h)^2 < 0$ za svako $h \neq 0$ tada f ima (lokalni) maksimum u tački c.

$c)$ Ako drugi izvodi uzimaju vrednosti različitog znaka za različito h tada u tački c funkcija nema lokalni ekstrem.

Dokaz: Iz Taylorove formule imamo da je u okolini tačke c funkciju moguće predstaviti sa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!} f''(\widehat{x})(x-c)^2 \quad \text{za} \quad \widehat{x} \in [c, x].$$

Kako je tačka c stacionarna imamo da je $f'(c) = 0$, odakle dobijamo da je

$$(10) \quad f(x) = f(c) + \frac{1}{2!} f''(\widehat{x})(x-c)^2$$

a) Kako je funkcija $f''(c)(h)^2$ neprekidna ona na skupu svih h takvih da je $||h|| = 1$ dostiže svoj minimum, koji ćemo označiti sa m i pritom važi da je $m > 0$ jer je $f''(c)(h)^2 > 0$. Sa druge strane, zbog neprekidnosti funkcije $f''(x)$ u tački c, postoji okolina $\mathcal{U}$, takva da je za svako $x \in \mathcal{U}$ zadovoljeno $f''(x)(h)^2 > m - \varepsilon$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$, dovoljno malo. Neka je $\varepsilon = \frac{m}{2}$, tada postoji okolina $\mathcal{U}$ takva da je $f''(x)(h)^2 > \frac{m}{2}$ za svako $x \in \mathcal{U}$ i svako h za koje je $||h|| = 1$. Imamo da se tada x može napisati u obliku $x = c + th$ gde je $t > 0$. Kako $\widehat{x} \in \mathcal{U}$ takođe, iz (10) dobijamo da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{1}{2!} f''(\widehat{x})(th)^2 = f(c) + \frac{1}{2!} t^2 f''(\widehat{x})(h)^2 = \\ &> f(c) + \frac{1}{2!} \frac{t^2 m}{2} > f(c) \end{aligned}$$

odnosno u tački c je (strogi, lokalni) minimum.

b) Dokaz je sličan dokazu pod a), samo se polazi od pretpostavke da funkcija $f''(c)(h)^2$ dostiže maksimum koji je po znaku negativan, jer je $f''(c)(h)^2 < 0$.
c) Kombinujući a) i b) dobijamo da postoji okolina tačke c ne kojoj za neko x_1 važi da je $f(x_1) > f(c)$, a za neko x_2 da je $f(x_2) < f(c)$ te u tački c nije (lokalni) ekstrem.

Napomena: Ako je za neko h $f''(c)(h)^2 \leqslant 0$ ili $f''(c)(h)^2 \geqslant 0$ tada se priroda stacionarne tačke ispituje metodom neposrednog proveravanja.

Definicija 10. Kvadratna forma

$$A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} hihj$$

naziva se

(i) pozitivno definitna ako su svi glavni minori veći od 0,

(ii) negativno definitna, ako su glavni minori naizmeničnog znaka, počev od negativnog

Silvesterov kriterijum. Ako je c stacionarna tačka i ako je $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)$ tada važi

a) Ako je kvadratna forma pozitivno definitna u tački c je (lokalni) minimum.

b) Ako je kvadratna forma negativno definitna u tački c je lokalni maksimum.

5.2. Uslovni ekstremum

Neka je data funkcija $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) : D(\subset R^{n+m}) \to R$. Određivanje uslovnih ekstremuma date funkcije predstavlja određivanje lokalnih ekstremuma, pri čemu se kao kandidati posmatraju tačke koje pripadaju hiperpovršima koje su definisane jednačinama:

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$
$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Metod Lagranžovih množitelja za uslovni ekstremum

Postupak određivanja stacionarnih tačaka sastoji se u nalaženju nula svih parcijalnih izvoda funkcije:

$$L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1 \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Fj(x_1 \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

koja se naziva Lagranžova pomoćna funkcija. Zaista, kako su parcijalni izvodi date funkcije:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Odavde određujemo stacionarnu tačku} \\ (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)\end{array}$$

vidimo da prve dve jednačine (praktično ih ima $n + m$ u opštem slučaju) definišu uslove stacionarne tačke dokazane u Tvrđenju 6, dok poslenja jednačina (ima ih m) obezbeđuje da stacionarna tačka pripada hiperpovršima kao u postavci problema. Prirodu stacionarne tačke ispitujemo određivanjem znaka drugog totalnog diferencijala funkcije L i važe isti zaključci kao u Teoremi o dovoljnim uslovima postojanja bezuslovnog ekstremuma.

5.3. Implicitno zadane funkcije

Postavlja se pitanje ako imamo funkciju $y : R^n \to R$ datu implicitno $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ da li postoji $\mathcal{V} \subset R^n$ takvo da za $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}$ važi $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ i da je $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ za jedinstveno određenu funkciju f i svaku tačku $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Primer: (1) $x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow$ jednačina kruga implicitno zadana

(i) $y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow$ za tačke iznad x-ose
$y = -\sqrt{1-x^2} \rightarrow$ za tačke ispod x-ose
ovo je za $|x| \neq 1$

(ii) Za $|x| = 1 \Rightarrow y_1 = +\sqrt{1-x^2}, y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ i tu izbor funkcije nije jedinstven te na ma kojoj okolini $\mathcal{V}$ tačke 1 ili -1 nemamo jedinstveno određenu funkciju f, pa je odgovor na pitanje iz uvoda negativan.

Teorema o implicitnoj funkciji. Neka je $F : \mathcal{U}(\subset R^{n+1}) \rightarrow R$ neprekidno-diferencijabilna funkcija i $\mathcal{U}$ otvoren skup u R^{n+1}. Neka je $(x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0) \in \mathcal{U}$ takva tačka da je $F(x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0) = 0$. Neka je $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0) \neq 0$. Tada postoji otvorena okolina $\mathcal{V} \subset R^n$, tačke $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ takva da na njoj postoji jednistvena funkcija f koja je neprekidno-diferencijabilna takva da za $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}$ važi $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ i da je

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

5.3.1. Ekstremumi implicitno zadatih funkcija

Ako je $F(x, y, z) = 0$ implicitno zadana funkcija i (x_0, y_0, z_0) tačka takva da je

$$\begin{aligned} &F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \\ &F'_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ &F'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{aligned}$$

tada je tačka (x_0, y_0, z_0) stacionarna.

Zaista, prema teoremi o implicitnoj funkciji postoji funkcija $z = f(x, y)$ takva da je $F(x, y, f(x, y)) = 0$.

Tada je

$$\left.\begin{aligned} F'_x + F'_z f'_x = 0 \\ F'_y + F'_z f'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{diferenciranjem polazne jednačine po } x \text{ i } y$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \\ f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \end{aligned}\right\} \text{iz ovih uslova se određuju stacionarne tačke}$$

Dalje diferenciranjem dobijamo

$$f''_{xx} = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xz} f'_x)F'_z - F'_x(F''_{zx} + F''_{zz} f'_x)}{(F'_z)^2},$$

$$f''_{xy} = -\frac{(F''_{xy} + F''_{xz}f'_y)F'_z - F'_x(F''_{zy} + F''_{zz}f'_y)}{(F'_z)^2},$$

$$f''_{yy} = -\frac{(F''_{yy} + F''_{yz}f'_y)F'_z - F'_y(F''_{zy} + F''_{zz}f'_y)}{(F'_z)^2}.$$

Računajući prethodne vrednosti u stacionarnoj tački imamo da je:

$$f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F''_{xx}}{F'_z}(x_0, y_0, z_0),$$

$$f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F''_{xy}}{F'_z}(x_0, y_0, z_0),$$

$$f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F''_{yy}}{F'_z}(x_0, y_0, z_0)$$

te sada se može posmatrati znak kvadratne forme kao kod običnog ekstremuma eksplicitno zadanih funkcija.

Napomena: Analogno se izvode algoritmi za određivanje ekstremuma po preostale dve koordinate. Geometrijski, određivanje ekstremuma implicitno zadanih funkcija znači određivanje temena površi koja je definisana implicitnom jednačinom.

Primer: Naći ekstremume implicitno zadanih funkcija:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 10 = 0$$

Rešenje: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 10 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = 2x - 2 = 0 \\ F'_y = 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array} \quad \text{pa iz jednačina} \quad \begin{array}{l} z^2 - 4z - 12 = 0 \\ z_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \{6, -2\} \end{array}$$
$$F'_z = 2z - 4$$

$\Rightarrow$ Dve kritične tačke $P_1(1, -1, -1)$ i $P_2(1, -1, 6)$.

Kako je $F'_z(P_1) = -8 \neq 0$ i $F'_z(P_2) = 8 \neq 0$ tada su ove tačke stacionarne. Zbog $F''_{xx} = 2 \quad F''_{yy} = 2 \quad F''_{xy} = 0$ imamo da je:

$a)$ za P_1 imamo da je $d^2 f(P_1) = \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2$ te je forma pozitivno definitna, odnosno u P_1 je minimum,

$b)$ za P_2 imamo da je $d^2 f(P_2) = -\frac{1}{4}dx^2 - \frac{1}{4}dy^2$ te je forma negativno definitna odnosno u P_2 je maksimum.