Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

3. (15) Funkciju $f(x) = e^x \sin x$ predstaviti sinusnim FOURIERovim redom na intervalu $(0, \pi)$.
Rešenje Primenjujući LAPLACEovu transformaciju na datu jednačinu, koja je zadata konvolucijom, dobijamo da je transformacija tražene funkcije

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Kako je $L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$, tada je

$$y(t) = (\sin * \sin)(t) = \int\limits_0^t \sin x \sin(t-x) dx = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

4. (20) Funkciju $f(x) = e^x \sin x$ predstaviti sinusnim FOURIERovim redom na intervalu $(0, \pi)$.
Rešenje. Predstavimo funkciju $g(x) = e^x$ kosinusnim FOURIERovim redom. Kako je $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi}$ i

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2+1},$$

a funkcija $f(x)$ neprekidno diferencijabilna, dobijamo da je

$$f(x) = \frac{(e^\pi - 1)}{\pi}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2+1}\sin x \cos nx.$$

Primenjujući adicione formule imamo da je

$$f(x) = \frac{(e^\pi - 1)}{\pi}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2+1}\sin(n+1)x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{n^2+1}\sin(n-1)x.$$

Podizanjem indeksa sumacije za 1 u prvoj i spuštanjem za 1 u drugoj sumi dobijamo da je

$$f(x) = \frac{(e^\pi - 1)}{\pi}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^\pi(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)^2+1}\sin nx - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^\pi(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)^2+1}\sin nx.$$

Izdvajanjem u drugoj sumi elemenata koji se dobijaju za $n = 0$ i 1 dobijamo

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,(e^\pi(-1)^n + 1)}{(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)}\sin nx,$$

što predstavlja FOURIER ov red polazne funkcije.

Beograd, 23.8.2005.