Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

1.(15) Odrediti realne konstante a i b tako da funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})^2, & y \neq 0 \\ ax+b, & y = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna, a zatim u svim tačkama za koje je $y = 0$ odrediti parcijalne izvode funkcije i ispitati njenu diferencijabilnost.

Rešenje. Kako je $\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})^2 = \frac{\pi}{2}x$, da bi funkcija bila neprekidna potrebno je da je $a = \frac{\pi}{2}$ i $b = 0$. Odredimo parcijalne izvode funkcije u tačkama za koje je $y = 0$. Imao da je $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{\pi}{2}$, za svako $x \in \mathbf{R}$, dok za parcijalni izvod po promenljivoj y mogu nastati dva slučaja, i imamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Da bi pokazali diferencijabilnost funkcije u tačkama $(x,0)$ potrebno i dovoljno je da je

$$\lim_{h_{1,2}\to 0} \frac{|f(x+h_1,h_2) - f(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)h_2|}{||h||} = 0.$$

Kako za $x \neq 0$ važi da je

$$\lim_{h_{1,2}\to 0} \frac{|(x+h_1+h_2)\operatorname{arctg}(\frac{x+h_1}{h_2})^2 - \frac{\pi}{2}(x+h_1+h_2)|}{||h||} = 0$$

funkcija je diferencijabilna u ovim tačkama.
Analogno, za $x = 0$ imamo da je

$$\lim_{h_{1,2}\to 0} \frac{|(h_1+h_2)\operatorname{arctg}(\frac{h_1}{h_2})^2 - \frac{\pi}{2}h_1|}{||h||} \neq 0$$

te funkcija nije diferencijabilna u tački $(0,0)$. Naime, ako bi poslednju graničnu vrednost posmatrali po skupu $h_1 = -h_2$ ona bi iznosila $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, što dokazuje njenu različitost od nule.

2. (20) Izračunati površinu i zapreminu tela ograničenog loptom:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

i paraboloidom:

$$x^2 + y^2 = 2az,$$

gde je $a > 0$.

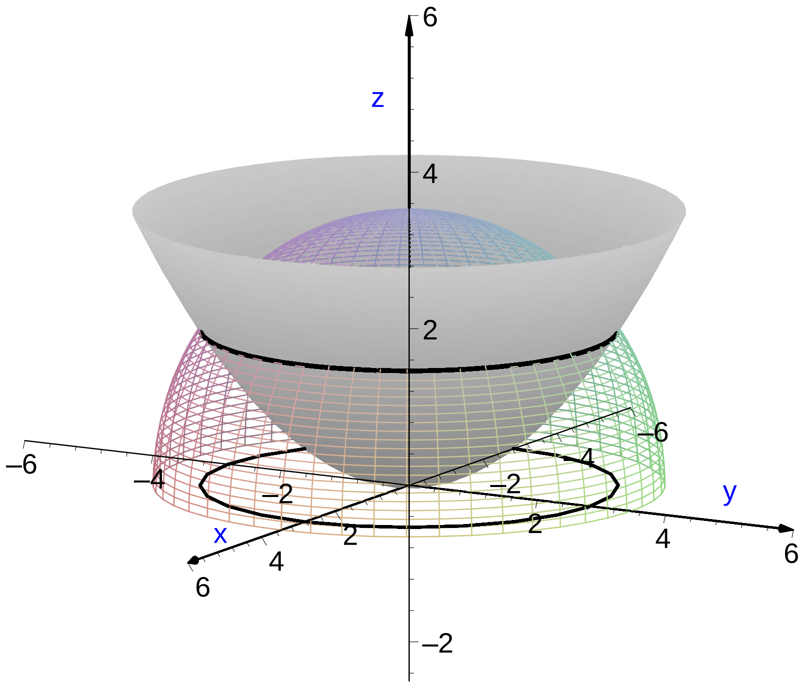
Rešenje. Posmatrano telo se dobija u preseku površi gornje polulopte:

$$z = f_1(x, y) = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} \tag{1}$$

i paraboloida:

$$z = f_2(x, y) = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Naime iz (1) i (2) dobijamo kvadratnu jednačinu $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$. Budući da je $z > 0$ zaključujemo da je presek posmatrana dva tela kružnica: $x^2 + y^2 = 2a^2$ na visini $z = a$. Posmatrano telo se projektuje na krug $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2a^2$.



(i) Odredimo površinu tela ograničenog delom lopte i delom paraboloida. Ako označimo površinu dela lopte sa P_1 tada je:

$$P_1 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)^2}\, dxdy = \sqrt{3}a \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Ako označimo površinu dela paraboloida sa P_2 tada je:

$$P_2 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial y}\Big)^2}\, dxdy = \frac{1}{a} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Samim tim tražena površina celog tela je:

$$P = \sqrt{3}a \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy + \frac{1}{a} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dxdy.$$

Uvođenjem polarnih koordinata: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ($|J| = \rho$) oblast $D_{\rho\varphi}$: $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}a \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ se skoro svuda jednoznačno preslikava na oblast D_{xy}. Na osnovu toga:

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{3}a \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \frac{1}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} \underbrace{\rho}_{|J|}\, d\rho d\varphi + \frac{1}{a} \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \sqrt{a^2 + \rho^2}\, \underbrace{\rho}_{|J|}\, d\rho d\varphi \\
&= \sqrt{3}a \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}a} \frac{\rho}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}}\, d\rho + \frac{1}{a} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{a^2 + \rho^2}\, \rho\, d\rho \\
&= 2\sqrt{3}\pi a \Big(- \sqrt{3a^2 - \rho^2} \Big)\Big|_0^{\sqrt{2}a} + \frac{2\pi}{a} \Big((a^2 + \rho^2)^{3/2} \Big)\Big|_0^{\sqrt{2}a} \\
&= 2\sqrt{3}\pi a(- a + \sqrt{3}a) + \frac{2\pi}{a}(3\sqrt{3}a^3 - a^2) = \frac{16}{3} a^2 \pi.
\end{aligned}$$

(ii) Odredimo zapreminu $\mu = \mu(V)$ tela V ograničenog delom lopte i delom paraboloida:

$$\begin{aligned}
\mu &= \iiint\limits_V 1\, dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \Big(f_1(x, y) - f_2(x, y) \Big)\, dxdy \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} \Big(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \Big)\, dxdy.
\end{aligned}$$

Uvođenjem polarnih koordinata: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ($|J| = \rho$) oblast $D_{\rho\varphi}$: $0 \le \rho \le \sqrt{2}a \wedge 0 \le \varphi \le 2\pi$ se skoro svuda jednoznačno preslikava na oblast D_{xy}. Na osnovu toga:

$$\mu = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \Big(\sqrt{3a^2-\rho^2} - \frac{1}{2a}\rho^2\Big) \underbrace{\rho}_{|J|} \, d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}a} \Big(\sqrt{3a^2-\rho^2}\,\rho - \frac{1}{2a}\rho^3\Big) d\rho d\varphi$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{3}(3a^2-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{8a}\rho^4\Big)\Big|_0^{\sqrt{2}a} = 2\pi\Big(-\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + \sqrt{3}a^3\Big) = \frac{a^3\pi}{3}(6\sqrt{3}-5).$$

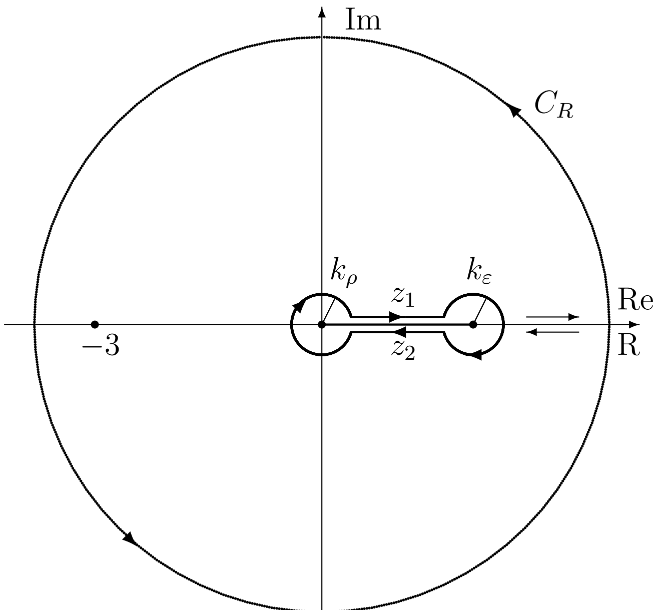
3.(20) Kompleksnom integracijom izračunati vrednost integrala

$$\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\, dx.$$

Rešenje. Izvršimo integraciju funkcije

$$f(z) = \frac{\sqrt{z(2-z)}}{z+3}$$

po punom krugu, pri čemu se krećemo pozitivno, polazeći iz tačke R na realnoj osi, a nakon obilaska kružnice C_R, prvo se krećemo po krivoj u donjoj, a zatim u gornjoj poluravni. Indeksi kružnica označavaju njihove poluprečnike. Kako funkcija $f(z)$ ima dve algebarske tačke grananja drugog reda, i to su tačke $z = 0$ i $z = 2$,



Povucimo zasek koji spaja te tačke. Uzmimo da je na gornjem zaseku z_1 argument tačaka jednak 0, a na donjem z_2 jednak 2π. Tada je moguće odabrati jednu regularnu granu funkcije $g(z) = \sqrt{z(2-z)}$, na skupu $\mathbf{C}\backslash[0,2]$. Odaberimo granu funkcije koja je određena sa $g(-3)=\sqrt{15}i$. Tada je za svako $x>2$ zadovoljeno da je $g(x)=-i\sqrt{x(x-2)}$. Zbog osobine aditivnosti integrala imamo da je:

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz+\int\limits_{k_\varepsilon} f(z)dz+\int\limits_{z_2} f(z)dz+\int\limits_{k_\rho} f(z)dz+\int\limits_{z_1} f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f;-3).$$

Zbog treće JOURDANove leme iz $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$ i $\lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z)=0$ dobijamo da je

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{k_\rho} f(z)dz=0 \text{ i } \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{k_\varepsilon} f(z)dz=0.$$

Imamo da je

$$\mathrm{Res}(f;-3)=\lim_{z\to -3}(z+3)f(z)=\sqrt{15}i.$$

Kako je na gornjem zaseku $z=x$ tada je $\int\limits_{z_1} f(z)dz=\int\limits_{\rho}^{2-\varepsilon} f(x)dx$, a na donjem zaseku imamo da je $z=xe^{2\pi i}$, te je $\int\limits_{z_2} f(z)dz=-\int\limits_{2-\varepsilon}^{\rho} f(x)dx$.

Kako bi odredili prvi od integrala u gornjoj jednakosti, razvijmo funkciju $f(z)$ u LAURENTov red u okolini $z=\infty$. Za $x>2$ imamo da je:

$$f(x)=-i\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1+\frac{3}{x}}=-i\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{-2}{x}\right)^n\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{3}{x}\right)^k.$$

Zbog jedinstvenosti LAURENTovog razvoja analitičke funkcije prethodni razvoj važi za svako z iz okoline beskonačnosti te prethodni razvoj predstavlja LAURENTov razvoj u okolini tačke beskonačno . Koeficijent uz član $\frac{1}{x}$ dobijamo uzimajući da je $n=0$ i $k=1$ odnosno $n=1$ i $k=0$, te je $\mathrm{Res}(f;\infty)=-4i$. Konačno, imamo da je $\int_{C_R} f(z)dz=-2\pi i\mathrm{Res}(f;\infty)=-8\pi$. Puštajući u gornjoj jednakosti da $\varepsilon,\rho\to 0$, a $R\to+\infty$ dobijamo da je

$$\int\limits_0^2 f(x)dx=\pi(4-\sqrt{15}).$$

4.(15) Odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije

$$f(t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x^2+a^2},\ \text{ za } a>0.$$

Rešenje. Imamo da je

$$L(f(t))=F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x^2+a^2}\,dx.$$

Kako integrali konvergiraju, menjajući redosled integracije, dobijamo da je

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\sin tx\,dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+p^2)}\,dx,$$

jer unutrašnji integral predstavlja LAPLACEovu transformaciju funkcije $f(t) = \sin tx$. Rastavljanjem podintegralne funkcije na parcijalne razlomke dobijamo da je

$$F(p) = \frac{1}{p^2-a^2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} - \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+p^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2-a^2}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2+p^2}\ \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a^2-p^2}\ln\left|\frac{a}{p}\right|.$$

Beograd, 10.2.2004.