Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

1.(15) Izračunati vrednost ili opovrgnuti postojanje ponovljenih i dvojnog limesa funkcije

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\,\mathrm{tg}\frac{x}{x+y},$$

u tački $(0,0)$.

Rešenje. Ponovljeni limesi funkcije postoje i iznose:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0, \text{ i}$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \tfrac{1}{\frac{x}{y}}\mathrm{tg}\tfrac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1} = 1.$$

Poslednju granična vrednost dobija se uvođenjem smene $\frac{x}{y} = t$ i primenom L'HOSPITALovog pravila. Dvojni limes ne postoji. Da bi to pokazali, uočimo dva niza koji konvergiraju graničnoj tački, kada $n \to \infty$, i to nizove $p_n = (\frac{1}{n}, 0)$ i $q_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Kako nizovi $f(p_n)$ i $f(q_n)$ konvergiraju redom ka 0 i $\mathrm{tg}\frac{1}{2}$, sledi tvrdjenje o nepostojanju dvojnog limesa.

2.(15) Izračunati fluks vektora $\vec{f} = (x, -y^2, x^2+z^2-1)$ koji uvire u površ:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

Rešenje. Fluks vektora koji uvire (ulazi) u zatvorenu površ se računa po formuli:

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint\limits_{S^-} (x, -y^2, x^2+z^2-1) \circ (dydz, dzdx, dxdy) \\ &= \iint\limits_{S^-} x\,dydz - y^2\,dzdx + (x^2+z^2-2)\,dxdy,\end{aligned}$$

gde je S elipsoid $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$. Kako su ispunjeni uslovi za primenu teoreme OSTROGRADSKOG, tada važi:

$$\Phi = -\iint\limits_{S^+} x\,dydz - y^2\,dzdx + (x^2+z^2-1)\,dxdy = -\iiint\limits_{V} (1-2y+2z)\,dxdydz,$$

gde je V unutrašnjost elipsoida $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2} \le 1$. Uvođenjem uopšetnih sfernih koordinata: $x = 3\rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = 2\rho\cos\theta\sin\varphi$, $z = \rho\sin\theta$ (sa vrednošću $|J| = 6\rho^2\cos\theta$) oblast V_1: $0\le\rho\le 1 \wedge -\pi/2\le\theta\le\pi/2 \wedge 0\le\varphi\le 2\pi$ se skoro svuda jednoznačno preslikava na oblast V.

Na osnovu toga:

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\iiint\limits_{V_1} \Big(1 - 2\underbrace{(2\rho\cos\theta\sin\varphi)}_{y} + 2\underbrace{(\rho\sin\theta)}_{z}\Big)\underbrace{6\rho^2\cos\theta}_{|J|}\, d\rho d\theta d\varphi \\
&= -6\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{1}\Big(\rho^2\cos\theta - 4\rho^3\cos^2\theta\sin\varphi + 2\rho^3\cos\theta\sin\theta\Big)\, d\rho d\theta d\varphi \\
&= -6\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\frac{1}{3}\cos\theta - 4\frac{1}{4}\cos^2\theta\sin\varphi + 2\frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\Big) d\theta d\varphi \\
&= -6\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\frac{2\pi}{3}\cos\theta - \cos^2\theta\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi + \pi\cos\theta\sin\theta\Big) d\theta \\
&= -6\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2\pi}{3}\cos\theta\, d\theta = -8\pi.
\end{aligned}$$

3.(20) Odrediti regularnu funkciju $f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\theta(\rho,\varphi)}$, gde je $z = \rho\, e^{i\varphi}$, čiji je modul

$$|f(z)| = R(\rho,\varphi) = e^{\rho^2\cos 2\varphi},$$

u zatvorenom obliku.

Rešenje. Izvedimo za funkciju $f(\rho e^{i\varphi}) = R(\rho,\varphi)e^{i\theta(\rho,\varphi)}$ CAUCHY -RIEMANNove formule. U tom cilju uočimo da su realan i imaginaran deo ove funkcije

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho,\varphi)\cos\theta(\rho,\varphi) \;\text{ i }\; v(\rho,\varphi) = R(\rho,\varphi)\sin\theta(\rho,\varphi).$$

Diferenciranjem po ρ i φ i zamenom dobijenih vrednosti u CAUCHY-RIEMANNove uslove u polarnim koordinatama dobijamo:

$$(R'_\rho - \frac{1}{\rho}R\theta'_\varphi)\cos\theta - (\frac{1}{\rho}R'_\varphi + R\theta'_\rho)\sin\theta = 0$$

$$(R'_\rho - \frac{1}{\rho}R\theta'_\varphi)\sin\theta + (\frac{1}{\rho}R'_\varphi + R\theta'_\rho)\cos\theta = 0$$

Kako je determinanta ovog sistema 1, tada on ima samo trivijalno rešenje, te je

$$R'_\rho - \frac{1}{\rho}R\theta'_\varphi = 0, \quad \frac{1}{\rho}R'_\varphi + R\theta'_\rho = 0.$$

Iz poslednjih jednakosti dobijamo CAUCHY -RIEMANNove uslove za polaznu funkciju, koji glase

$$\boxed{R'_\rho = \frac{1}{\rho}R\theta'_\varphi \quad R'_\varphi = -\rho R\theta'_\rho.}$$

U našem slučaju tražena funkcija ima oblik $f(z) = e^{\rho^2 \cos 2\varphi} e^{i\theta(\rho,\varphi)}$. Zbog izvedenih uslova funkcija $\theta(\rho,\varphi)$ mora zadovoljavati jednačinu $\theta'_\varphi = 2\rho^2 \cos 2\varphi$ i $\theta'_\rho = 2\rho \sin 2\varphi$, odakle se integracijom dobija da je $\theta(\rho,\varphi) = \rho^2 \sin 2\varphi + c$, gde je c proizvoljna konstanta. Primenjujući Tompsonvo metod dobijamo da je tražena funkcija $f(z) = e^{z^2+ic}$.

4.(20) Funkciju $f(x) = \sin x \ln \cos \frac{x}{2}$ predstaviti trigonometrijskim FOURIERovim redom na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rešenje. FOURIERov red polazne neparne funkcije koji konvergira ka vrednosti funkcije ima oblik

$$f(x) = (\tfrac{1}{4} - \ln 2) \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{n^2-1} \sin nx.$$

Beograd, 10.3.2004.