Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

1.(15) Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije

$$z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2},$$

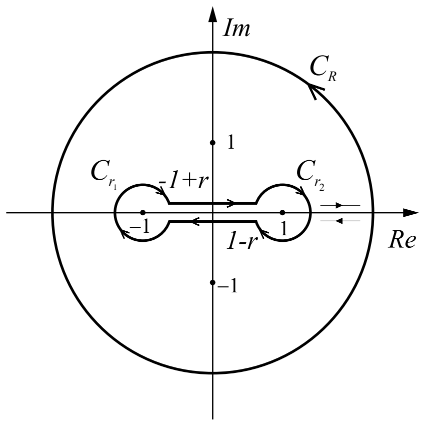
na njenom domenu.

Rešenje. Nije teško uočiti da je funkcija definisana na kvadratu $(x,y) \in [-1,1]^2$. Kandidati za tačke globalnog ekstremuma su $M(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ (proističu iz Slivesterovog kriterijuma), $A(\pm1,0)$, $B(0,\pm1)$ (proističu iz rubnih uslova) i $C(\pm1,\pm1)$ (tačke nediferencijabilnosti funkcije granice). Izračunavanjem vrednosti funkcije u dobijenim tačkama dobijamo da je $z_{max} = z(M) = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$, a $z_{min} = z(A) = z(B) = 1$.

3.(25) Kompleksnom integracijom izračunati vrednost integrala:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{1+x^2} dx.$$

Rešenje Izvršimo transformaciju podintegralne funkcije sa $\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4} = (1-x)\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$. Izvršimo integraciju funkcije $f(z) = \frac{1-z}{1+z^2}\sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}}$ po konturi sa slike 1. Kako su tačke ±1, algebarske tačke grananja petog reda, zasek je povučen između njih duž realne ose. Označimo sa $g(z) = \sqrt[5]{\frac{1+z}{1-z}}$. Za odabranu onu granu funkcije g za koju je



Slika 1.

$g(-2) = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}e^{i\frac{\pi}{5}}$, dobijamo da je $g(i) = e^{i\frac{\pi}{10}}$ i $g(-i) = e^{i\frac{3\pi}{10}}$. Kako na osnovu JORDANovih lema imamo da je $\lim\limits_{r\to0}\int\limits_{C_{r_i}} (f(z)\,dz) = 0$ $(i =$

$1,2)$, na osnovu teoreme CAUCHYjeve teoreme o residuumima, dobijamo da je

$$(\Sigma) \qquad \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \Big(\int\limits_{1-r}^{-1+r} f(z)\,dz + \int\limits_{-1+r}^{1-r} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz\Big) = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f;i)+\mathrm{Res}\,(f;-i)).$$

Kako su $\pm i$ polovi pvog reda imamo da je

$$\mathrm{Res}\,(f;i) = -\tfrac{1}{2}(i+1)e^{i\frac{\pi}{10}} \quad \text{i} \quad \mathrm{Res}\,(f;-i) = \tfrac{1}{2}(i-1)e^{i\frac{3\pi}{10}}.$$

Uočimo da za svako $x>1$ imamo da je $g(x) = e^{i\frac{\pi}{5}}\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$, te LAURENTov red funkcije $f(x)$, u okolini beskonačnosti, glasi

$$f(x) = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{1-x}{1+x^2}\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{-(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x^2})}\cdot\frac{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{5}}\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{x^k}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{j}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^j\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1}{l}\frac{1}{x^{2l}}.$$

Zbog jedinstvenosti LAURENTovog razvoja analitičke funkcije navedeni razvoj važi za svako z iz okoline beskonačnosti, odakle za $k=j=l=0$ dobijamo da je koeficijent uz element razvoja $\frac{1}{z}$ jednak $-e^{i\frac{\pi}{5}}$, te je $\mathrm{Res}\,(f;\infty) = e^{i\frac{\pi}{5}}$. Iz dobijenog sledi da je $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = -2\pi i e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Kako je prvi od integrala u jednakosti (Σ) po donjem zaseku, na kome je $z = xe^{2\pi i}$, tada je $f(z) = e^{i\frac{2\pi}{5}}f(x)$.

Zamenom dobijenih rezultata u jednakost (Σ) dobijamo da je

$$(1-e^{i\frac{2\pi}{5}})\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\pi i\Big(e^{i\frac{\pi}{5}} - \frac{1}{2}(i+1)e^{i\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{2}(i-1)e^{i\frac{3\pi}{10}}\Big).$$

Primenom adicionih formula dobijamo da je $1-e^{i\frac{2\pi}{5}} = -2i\sin\frac{\pi}{5}e^{i\frac{\pi}{5}}$, odakle zamenom u prethodu jednakost dobijamo da je vrednost traženog integrala

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}\Big(-1+\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}\Big).$$

4.(15) Primenom LAPLACEove transformcije rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$x''(t) + (t+1)x'(t) + tx(t) = 0, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = -1.$$

Rešenje. Neka je LAPLACEova transformacija nepoznate funkcije $x(t)$ funkcija $X(s)$. Primenjujući transformaciju na polaznu jednačinu, dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$X' - \frac{s^2+s-1}{s+1}X = -\frac{s}{s+1},$$

čije je rešenje:

$$X(s) = \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s+1}(c + e^{-\frac{s^2}{2}}).$$

Kako mora važiti da je $\lim\limits_{s\to+\infty} X(s) = 0$, tada je $c = 0$, te je $X(s) = \frac{1}{s+1}$, odakle sledi da je rešenje diferencijalne jednačine $x(t) = e^{-t}$.

Beograd, 23.9.2004.