Elektrotehnički Fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešenja zadataka iz Matematike 3

1.(20) Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4a} + \sqrt{6a^2 - x^2}\cos y, \quad (a > 0).$$

Rešenje Nalaženjem parcijalnih izvoda polazne funkcije dobijamo sistem jednačina

$$\frac{x}{2a} - \frac{x}{\sqrt{6a^2 - x^2}}\cos y = 0 \quad \sqrt{6a^2 - x^2}\sin y = 0,$$

iz koga pronalazimo da su stacionarne tačke polazne funkcije

$$M_{1n}(0, n\pi) \;\; M_{2n}(\sqrt{2}a, 2n\pi) \text{ i } M_{3n}(-\sqrt{2}a, 2n\pi).$$

Kako su drugi parcijalni izvodi polazne funkcije

$$f_{xx} = \tfrac{1}{2a} - \tfrac{6a^2\cos y}{(6a^2 - x^2)^{3/2}}$$
$$f_{xy} = f_{yx} = \tfrac{x}{\sqrt{6a^2 - x^2}}\sin y$$
$$f_{yy} = -\sqrt{6a^2 - x^2}\cos y,$$

primenom Silvesterovog kriterijuma nalazimo da su M_{1n} lokalni minimumi ukoliko je n neparno, a sedlaste tačke ukoliko je n parno, dok su tačke M_{2n} i M_{3n} lokalni maksimumi.

2.(15) Pokazati da vrednost krivolinijskog integrala

$$\int_l (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$$

ne zavisi od krive l koja spaja tačke $A(0,0)$ i $B(\alpha, \beta)$ i izračunati vrednost datog integrala.
Rešenje Za $P(x,y) = x^4 + 4xy^3$ i $Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ važi da je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$, te integral ne zavisi od izbora krive l koja spaja date tačke. Kako je podintegralni izraz totalni diferencijal funkcije

$u(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5 + c$, dobijamo da je vrednost integrala jednaka $I = u(\alpha,\beta) - u(0,0) = \frac{1}{5}\alpha^5 + 2\alpha^2\beta^3 - \beta^5$.

4.(15) Primenom LAPLACEove transformacije rešiti integralnu jednačinu

$$y(t) = 1 - 2t - 4t^2 - \int_0^t [1 + 6(t-u) - 4(t-u)^2]y(u)du.$$

Rešenje Primenjujući LAPLACEovu transformaciju na datu jednačinu dobijamo da je slika tražene funkcije

$$Y(p) = \frac{p^2 - 2p - 8}{p^3 + p^2 + 6p - 8} = \frac{p^2 - 2p - 8}{(p-1)(p^2 + 2p + 8)}.$$

Rastavljajući funkciju $Y(p)$ na parcijalne razlomke, dobijamo da je

$$Y(p) = -\frac{9}{11}\frac{1}{p-1} + \frac{20}{11}\frac{p+1}{(p+1)^2 + 7} - \frac{4}{11}\frac{1}{(p+1)^2 + 7},$$

odakle dobijamo da je tražena funkcija

$$y(t) = -\frac{9}{11}e^t + \frac{20}{11}e^{-t}\cos\sqrt{7}t - \frac{4\sqrt{7}}{77}e^{-t}\sin\sqrt{7}t.$$

Beograd, 24.6.2004.