Glava 1

Teorija integrala

1.1 Pojam krive. Krivolinijski integrali

1.1.1 Krive u prostoru

Definicija 1. (*Pojam krive*) Neka su date funkcije x, y, z koje slikaju I u $\mathbb{R}$ ($x, y, z : I \to \mathbb{R}$), gde je I bilo koji neprazan podskup skupa $\mathbb{R}$ ($\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$). Najčešće će I predstavljati neki od intervala $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ ili $[a, b)$. Kriva C je skup tačaka, definisan na sledeći način:

$$C : \left\{ (x, y, z) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. ,\ t \in I\ .$$

Definicija 2. (*Definicija zatvorene krive*) Kriva C, definisana u definiciji 1, je *zatvorena* ako je:

$$\underbrace{(x(a), y(a), z(a))}_{\text{početna tačka}} = \underbrace{(x(b), y(b), z(b))}_{\text{krajnja tačka}}.$$

Definicija 3. (*Definicija proste krive*) Neka je I bilo koji interval. Kriva, definisana u definiciji 1, je *prosta* ako važi:

$$t', t" \in I, t' \neq t" \Rightarrow (x(t'), y(t'), z(t')) \neq (x(t"), y(t"), z(t")),$$

pri čemu prethodni uslov ne mora biti ispunjen ako su t' i t'' početna i krajnja tačka intervala.

Definicija 4. (*Definicija neprekidne krive*) Kriva C, definisana u definiciji 1, pri čemu je I neki od navedenih intervala, je *neprekidna kriva*, ako su sve funkcije $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ neprekidne funkcije na I.

Definicija 5. (*Definicija rektificijabilne krive*) Kriva C je *rektificijabilna* ako ima konačnu dužinu.

Teorema 1. (*Dovoljan uslov rektificijabilnost krive*) Ako su funkcije $t \to x'(t), t \to y'(t), t \to z'(t)$ neprekidne na I tada je kriva C rektificijabilna.

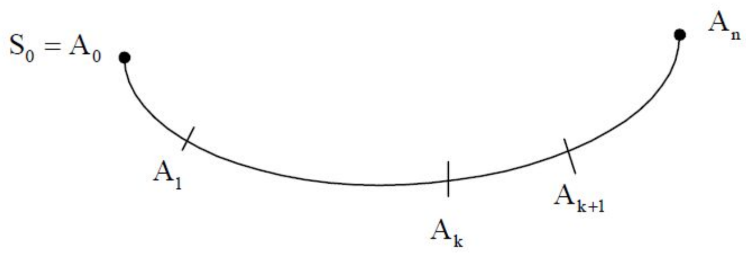
Teorema 2. Ako je kriva C zadata parametarski $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ i ako funkcije $x, y, z : I \to R$ imaju neprekidne prve izvode na nekom segmentu $[t_0, T]$, tada je kriva C zadata parametarskim funkcijama na ovom segmentu rektificijabilna i pri tome važi da je dužina krive $S = (R)\int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt$.

1.1.2 Krivolinijski integral prve vrste

Definicija 6. (*Definicija krivolinijskog integrala* I *vrste*) Neka je kriva C, iz definicije 1, pri čemu je I neki od intervala $[a, b], (a, b), (a, b]$ ili $[a, b)$, neprekidna, prosta i rektificijabilna. Neka je početna tačka krive označena sa A_0. Krivu C podelimo tačkama $A_0, A_1, \ldots, A_n$, pri čemu je A_n krajnja tačka te krive, na proizvoljan način. Izbor ovih tačaka zovemo podela $\mathcal{P}$ krive C, i neka su sa $\widehat{A_k A_{k+1}},\ (k = 0, 1, ..., n-1)$ označen deo krive između tačaka A_k i A_{k+1}. Neka σ_k označava dužinu luka $\widehat{A_k A_{k+1}}$. Na svakom od lukova $\widehat{A_k A_{k+1}}$ izaberimo proizvoljnu tačku $M_k = M_k(\xi_k, \varphi_k, \eta_k)$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$.

Neka je data funkcija $f : R^3 \to R$, koja je definisana u svim tačkama krive C. Sa σ označimo Darbouxovu sumu $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\sigma_k$, funkcije f za izabranu podelu P. Neka je $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sigma_k$.

Ako postoji konstanta I tako da je $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$ odnosno da je ispunjen



sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \mathcal{P})(\forall M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}})\ \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

tada za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala I vrste po krivoj C. Broj I nazivamo krivolinijski integral I vrste funkcije f duž date krive C i pišemo $I = (\mathrm{I}) \int_C f\,(x, y, z)\,ds$.

Teorema 3. (*Svođenje krivolinijskih integrala* I *vrste na Riemann-ov integral*). Ako je $C:\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \theta(t),\ t \in [a, b]$ tada važi da je

$$\int\limits_C f(x,y,z)ds = (R)\int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2}dt.$$

Dokaz: Teorema 3 dokazuje se primenom Teoreme 2.

1.1.3 Krivolinijski integral druge vrste

Definicija 7. (*Definicija krivolinijskog integrala* II *vrste po* x*-osi*) Neka za krivu C, tačke A_k i $M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$, funkciju $f : C \to R$ $(C \subset R^3)$ važe iste pretpostavke kao i u slučaju definicije krivolinijskog integrala I vrste. Neka su sa x_k označene projekcije tačaka A_k na x-osu i neka je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$. Posmatrajmo Darboux-ovu sumu:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(M_k\right) \cdot \Delta x_k.$$

Neka je $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta x_k$ dijametar podele $\mathcal{P}$. Ako postoji konačan realan broj I tako da važi $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$, odnosno da je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \mathcal{P})\left(\forall M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}}\right)\ \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

tada broj I nazivamo krivolinijski integral II vrste funkcije f duž krive C po x-osi. Za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala po x-osi i pišemo $I = (\mathrm{II}) \int_C f(x, y, z)\, dx$. Slično se definišu krivolinijski integrali druge vrste po y i z osi.

Definicija 8. (*Definicija Krivolinijski integral* II *vrste*) Neka su date funkcije $P(x, y, z),\ Q(x, y, z)\ i\ R(x, y, z) : R^3 \to R$ i neka su definisane u svim tačkama krive C iz R^3, pri čemu je ta kriva neprekidna, prosta, rektificijabilna. Za funkciju P definišimo krivolinijski integral II vrste po x-osi kao u prethodnoj definiciji, a za Q i R definišemo analogne integrale, ali respektivno po osama y i z. Tada se krivolinijski integral II vrste definiše kao sledeći zbir:

$$\begin{aligned} I &= (\mathrm{II}) \int_C P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz \\ &= (\mathrm{II}) \int_C P(x, y, z) \cdot dx + (\mathrm{II}) \int_C Q(x, y, z) \cdot dy + (\mathrm{II}) \int_C R(x, y, z) \cdot dz \end{aligned}$$

Teorema 4. (*Izračunavanje krivolinijskog integrala* II *vrste*) Neka je data kriva $C : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, pri čemu $t \in I$ (I je neki od intervala $[a, b], (a, b), (a, b]$ ili $[a, b)$), tako da su funkcije x, y, z, x', y', z' neprekidne na I. Neka su date funkcije $P, Q, R : C \to R$ koje su neprekidne u svim tačkama krive C. Tada se integral $I = (\mathrm{II}) \int_C P dx + Q dy + R dz$ svodi na Riemann-ov integral na sledeći način:

$$\begin{aligned} I = \int_a^b & (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) \\ & + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt. \end{aligned}$$

Dokaz: Pošto je polazni krivolinijski integral zbir tri integrala, dokaz izvodimo za jedan sabirak. Dokazaćemo da je:

$$I = (\mathrm{II}) \int_C P dx = (R) \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) dt.$$

Prethodnu jednakost dokazaćemo u slučaju kada je $I = [a, b]$.

Pokazaćemo da se razlika Darboux-ove sume krivolinijskog integrala i Riemann-ovog integrala može učiniti proizvoljno malom, manjom od unapred zadanog proizvoljnog $\varepsilon > 0$. To će značiti da su integrali iz iskaza teoreme jednaki.

Kako je krivolinijski integral II vrste jednak I, važi:

$$(\forall \mathcal{P})\left(\forall M_k \in \widehat{A_k A_{k+1}}\right)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon.$$

Posmatrajmo podelu $\mathcal{P}$ čiji je dijametar $\lambda < \delta$ (δ je veličina iz uslova koji obezbeđuje postojanja krivolinijskog integrala). Neka su $A_k = (x_k, y_k, z_k) = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$ podeone tačke krive C, $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ i $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Posmatrajmo Darboux-ovu sumu σ za krivolinijski integral II vrste.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot \Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot (x(t_{k+1}) - x(t_k))$$

pri čemu su

$$M_k = (x(\bar{t}_k),\ y(\bar{t}_k),\ z(\bar{t}_k)) \in \widehat{A_k A_{k+1}}, \quad \bar{t}_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Kako je prema Newton-Leibnitz-ovoj formuli

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t)\, dt,$$

dobijamo da je prethodna Darboux-ova suma jednaka

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k))\, x'(t)\, dt.$$

Takođe, na osnovu osobine aditivnosti integrala, imamo da je polazni Riemannov integral jednak:

$$I = \int_a^b P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \cdot x'\left(t\right) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \cdot x'\left(t\right) dt.$$

U cilju daljeg izvođenja dokaza, uočimo nekoliko činjenica:

- Zbog Weierstrass-ove teoreme neprekidna funkcija $x'(t)$ dostiže svoj sup na intervalu $[a, b]$, što znači da

  $(\exists L > 0)\ (\forall t \in [a, b])\ |x'(t)| \leqslant L.$

- Ako $t, \bar{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$, pošto je $\lambda < \delta$, sledi da je $|\Delta t_k| \leqslant \lambda < \delta$.

- Pošto je funkcija $t \to P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada za proizvoljno $\varepsilon' > 0$ postoji $\delta' > 0$ (uzimamo da je $\delta' < \delta$, a ako taj uslov nije ispunjen uzima se $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$), tako da važi uslov:

  $|t_1 - t_2| < \delta' \Rightarrow |P\left(x(t_1), y(t_1), z(t_1)\right) - P\left(x(t_2), y(t_2), z(t_2)\right)| < \varepsilon'.$

  Na osnovu prethodnog, zbog neprekidnosti i činjenice navedene u 2. tački, važi da je za $t, \bar{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ispunjeno

  $$|P\left(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)\right) - P\left(x(t), y(t), z(t)\right)| < \varepsilon'.$$

Na osnovu prethodnog imamo da je

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant |\sigma - I| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(P\left(x\left(\bar{t}_k\right), y\left(\bar{t}_k\right), z\left(\bar{t}_k\right)\right) - P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\right) \cdot x'\left(t\right) dt \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|P\left(x\left(\bar{t}_k\right), y\left(\bar{t}_k\right), z\left(\bar{t}_k\right)\right) - P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\right| \cdot \left|x'\left(t\right)\right| dt \\
&\leqslant L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(P\left(x\left(\overline{t_k}\right), y\left(\overline{t_k}\right), z\left(\overline{t_k}\right)\right) - P\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)\right) dt
\end{aligned}$$

$$\leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon' dt.$$

Za polazno $\varepsilon > 0$ i za $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L(b-a)}$ postoji $\delta' < \delta$ tako da je ispunjen uslov iz 2. tačke.

Sada možemo da zaključimo da važi sledeća implikacija.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\ \exists \delta' = \delta'\left(\frac{\varepsilon}{L(b-a)}\right) > 0)\ \lambda < \delta' < \delta$$

$$\Rightarrow |\sigma - I| \leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon}{L(b-a)} dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b-a) = \varepsilon,$$

odakle dobijamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\ \exists \delta > 0) \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| \leqslant \varepsilon,$$

što znači da je $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = (R) \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$, odnosno

$$\int_C f(x,y,z) dx = (R) \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

Na sličan način dokazujemo jednakost krivolinijskih integrala po y i z osi odgovarajućim Riemann-ovim integralima, te važi:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = (R) \int_a^b \left(P_x^{'} + Q_y^{'} + R_z^{'} \right) dt.$$

Tvrđenje teoreme važi i u slučajevima kada je interval I otvoren ili poluotvoren, što se dokazuje na osnovu prethodno dokazanog i osobine aditivnosti integrala.

1.1.4 Nezavisnost krivolinijskog integrala druge vrste od puta integracije

Podsetimo se nekih pojmova:

(a) Za oblast $\varnothing \neq D \subset R^3$ kažemo da je povezana, ako za D važe sledeći uslovi:

- Skup D ima neprazan interior ($intD \neq 0$).
- Svake dve tačke skupa D se mogu spojiti izlomljenom linijom takvom da ta linija čitava leži u D.

(b) Za krivu L kažemo da je glatka ako se u svakoj tački te krive može postaviti tangenta na tu krivu, na jedinstven način.

(c) Za krivu L kažemo da je deo po deo glatka ako se ona sastoji iz najviše konačno mnogo glatkih delova.

Neka je data povezana oblast $D \subset R^3, D \neq \varnothing$ i neka su funkcije $P = P\left(x, y, z\right), Q = Q\left(x, y, z\right), R = R(x, y, z) \in C(D)$. Ako je kriva $L \subset D$ deo po deo glatka takva da joj je A početna tačka, a B krajnja tačka, kakvi uslovi moraju biti zadovoljeni tako da vrednost integrala $\int_L P \cdot dx + Q \cdot dy + Rdz$ ne zavisi od oblika krive (puta integracije)? Odgovor na ovo pitanje biće iskazan u vidu dve teoreme.

Teorema 5. Integral $\int_L P{\cdot}dx{+}Q{\cdot}dy{+}Rdz$ ne zavisi od puta integracije ako i samo ako postoji funkcija $u : D \to R,\ D \subset R^3$ takva da je $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = Pdx + Qdy + Rdz$, odnosno mora važiti $u_x^{'} = \frac{\partial u}{\partial x} = P$, $u_y^{'} = \frac{\partial u}{\partial y} = Q$ i $u_y^{'} = \frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Dokaz: Najpre dokažimo da ako posmatrani integral ne zavisi od puta integracije, tada postoji funkcija

$u : D \to R$, tako da je $du = Pdx + Qdy + Rdz$ koja je definisana sa

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Dokazaćemo da definisana funkcija zadovoljava uslove teoreme. Posmatrajmo:

$$\Delta u = u(x+ \triangle\, x, y, z) - u(x, y, z) =$$

$$= \underbrace{\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x+\triangle x,y,z)}}_{L_1} Pdx + Qdy + Rdz - \underbrace{\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}}_{L} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \underbrace{\int_{(x,y,z)}^{(x+\triangle x,y,z)}}_{I} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Parametrizujmo interval I sa

$$I : \begin{cases} x = t,\ t \in (x, x + \Delta x) \\ y = const,\ dy = 0 \\ z = const,\ dy = 0 \end{cases} .$$

Kako je P neprekidna funkcija, na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti integrala, iz prethodnog dobijamo da je

$$\Delta u = (\mathrm{R}) \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z)dt = \Delta x P(x + \theta\Delta x, y, z),\ 0 < \theta < 1.$$

Iz prethodnog dobijamo da je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x, y, z)$, odnosno važi da je $u'_x(x, y, z) = P(x, y, z)$. Na sličan način se dokazuje: $u'_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$, $u'_z(x, y, z) = R(x, y, z)$.

Dokažimo teoremu u obrnutom smeru. Neka postoji funkcija $u : D \to R$, $D \subset R^3$ takva da je $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Tada za glatki luk L i njegovu parametrizaciju $\varphi : [a, b] \to R^3$, za $v = u \circ \varphi : [a, b] \to R$ $(v = v(t))$ važi:

$$\int_L P \cdot dx + Q \cdot dy + Rdz = \int_L du =$$

$$= \int_a^b v'(t)dt = v(b) - v(a) = u(\varphi(b)) - u(\varphi(a)) =$$

$$= u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)).$$

Dakle integral ne zavisi od puta integracije, nego samo od vrednosti funkcije u u krajnjim tačkama.

Teorema 6. Neka su $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) \in C(D)$ neprekidne funkcije. Tada važi: Izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ je totalni diferencijal neke funkcije $u : D \to R$, ako i samo ako važe uslovi:

$$(**) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Dokaz: Dokaz ćemo izvršiti samo u jednom smeru. Pokazaćemo da ako je izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ totalni diferencijal, da tada važe navedeni uslovi.

Za $u : D \to R$, gde $du = Pdx + Qdy + Rdz$, $u \in C^2(D)$ važi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Obrnut smer dokaza je dosta složeniji i ovde ga izostavljamo.

1.2 Dvojni, trojni i višestruki integral

1.2.1 Pojam dvojnog, trojnog i višestrukog integrala

Definicija 9. (*Definicija dvojnog integrala*) Neka je dat neprazan skup $D(\neq \emptyset) \subset R^2$ i funkcija $f : D \to R$, koja je ograničena, tj. postoji konstanta $M > 0$ takva da je za $\forall(x, y) \in D$ ispunjen uslov: $|f(x, y)| \leqslant M$. Razložimo oblast D podelom $\mathcal{P}$ na podoblasti $D_1, D_2, ..., D_n$, tako da važi:

(i) $(\forall i \in N)\ D_i \subset D$ i $D_i \neq \emptyset$,

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$,

(iii) $intD_i \cap intD_j = \emptyset;\ i,\ j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j.$

U svakoj od oblasti D_i proizvoljnu izaberimo po jednu tačku $T_i(x_i, y_i) \in D_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Sa λ označimo maksimum od dijametara oblasti D_i: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, gde je $\lambda_i = diam(D_i) = \sup\limits_{A,B \in D_i} (d(A, B))$.

Izrazom $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\, mes\,(D_i)$, gde $mes\,(D_i)$ označava površinu oblasti D_i, definišemo *Darboux*ovu sumu funkcije f po oblasti D za podelu $\mathcal{P}$ i izbor tačaka T_i.

Ako postoji konstanta $I \in R$ tako da je $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$ odnosno da je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \mathcal{P})\,(\forall T_k \in D_k)\;\; \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je funkcija f integrabilna u smislu postojanja dvojnog integrala po oblasti D. Broj I naziva se dvojnim integralom funkcije f po oblasti D u oznaci $I = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$.

Napomena: Veoma slično i pod sličnim uslovima definišemo trojni (trostruki), a takođe i višestruki integral. Darbouxova suma u slučaju višestrukog integrala glasi $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\, mes(V_k)$, pri čemu $mes(V_k)$ označava n-dimenzionu zapreminu podeoka V_k. Trojni integral označavamo sa $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV$, a n-dimenzioni sa $I = \iiint\limits_V \ldots \int f(x_1, ..., x_n)dV$.

1.2.2 Zamena promenljivih u dvojnom integralu

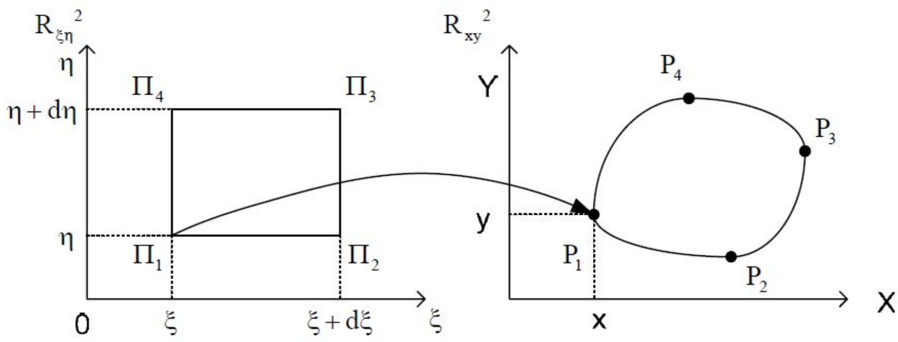
Teorema o smeni promenljive u dvojnom integralu. Posmatrajmo integral $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Neka se parametrizacijom $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta),\ (\xi,\eta) \in \Delta \subset R^2$, skup $\Delta \subset R^2$ slika u $D \subset R^2$, pri čemu su $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$ jednoznačna i glatka preslikavanja. Tada važi da je

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\, |J|\, d\xi d\eta,$$

gde je $|J| = \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|$ *Jacobi*eva determinanta preslikavanja $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$.

Dokaz. Izvršićemo dokaz, za dobro odabran oblik oblasti $\Delta \subset R^2$ (Svaka oblast može se razložiti na oblasti bilo kog oblika, te izbor oblika oblasti Δ ne umanjuje opštost dokaza.)

Neka se preslikavanje ovih oblasti vrši kao na slici:



Neka se tačke $\Pi_1(\xi,\eta), \Pi_2(\xi+d\xi,\eta), \Pi_3(\xi+d\xi,\eta+d\eta), \Pi_4(\xi,\eta+d\eta)$, slikaju redom u tačke

$$\begin{aligned}
&P_1(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)),\\
&P_2(x(\xi+d\xi,\eta), y(\xi+d\xi,\eta)),\\
&P_3(x(\xi+d\xi,\eta+d\eta), y(\xi+d\xi,\eta+d\eta)),\\
&P_4(x(\xi,\eta+d\eta), y(\xi,\eta+d\eta)).
\end{aligned}$$

Izvršimo aproksimaciju *Taylor*ovom formulom, koordinate tačaka:

$$\begin{aligned}
&x(\xi+d\xi,\eta) \approx x(\xi,\eta) + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi = x + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi\\
&y(\xi+d\xi,\eta) \approx y(\xi,\eta) + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi = y + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\\
&x(\xi+d\xi,\eta+d\eta) \approx x(\xi,\eta) + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta = x + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\\
&y(\xi+d\xi,\eta+d\eta) \approx y(\xi,\eta) + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial y}{\partial \eta}d\eta = y + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial y}{\partial \eta}d\eta
\end{aligned}$$

Zamenom u koordinate tačaka dobijamo da je:

$$\begin{aligned}
&P_1(x,y)\\
&P_2(x + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi, y + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi)\\
&P_3(x + \tfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \tfrac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \tfrac{\partial y}{\partial \eta}d\eta)\\
&P_4(x + \tfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, y + \tfrac{\partial y}{\partial \eta}d\eta)
\end{aligned}$$

Podsetimo se iz analitičke geometrije, da je površina trougla čija su temena $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ jednaka

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot | \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} |.$$

Površina krivolinijskog paralelograma $P_1P_2P_3P_4$ jednaka je:

$$P(P_1P_2P_3P_4) = 2 \cdot P(P_1P_2P_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta.$$

Iz poslednjeg sledi da je

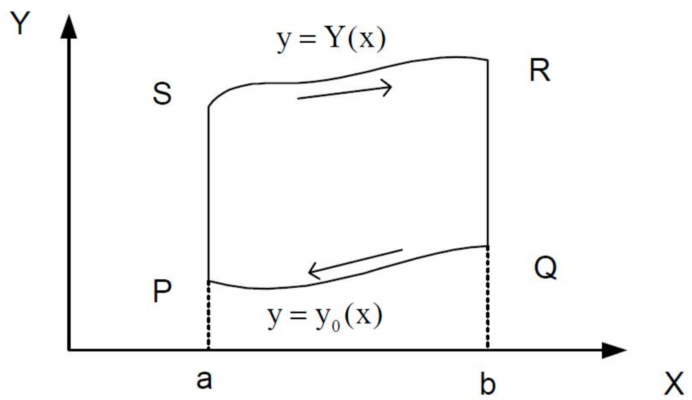
$$dx \cdot dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta = |J| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad .$$

1.2.3 Green-Riemann-ova formula

Green-Riemann-ova formula. Neka su $P, Q : D \to R$, neprekidno diferencijabilna preslikavanja oblasti $D \subset R^2$ koju ograničava zatvorena kriva L. Tada važi

$$\oint\limits_{L^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dokaz. Izvršimo dokaz za dovoljno jednostavne oblasti.



Pretpostavimo da je data oblast $D \subset R^2$ i pretpostavimo da je ova oblast D ograničena zatvorenom konturom $L = \widehat{PQRS}$, koja je definisana na sledeći način: $y_0 = y_0(x)$, $y = Y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, pri čemu je $\forall x \in [a,b]$, $y_0(x) \leqslant Y(x)$ i ordinatama $x = a$, $x = b$.

Tada, na osnovu Newton-Leibnitz-ove formule imamo da je

$$I = \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= \int_a^b P\left(x, Y\left(x\right)\right) dx - \int_a^b P\left(x, y_0\left(x\right)\right) dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{\overset{\frown}{SR}} P\left(x, y\right) dx + \int_{\overset{\frown}{QP}} P\left(x, y\right) dx = \oint\limits_{L^-} P\left(x, y\right) dx = - \oint\limits_{L^+} P\left(x, y\right) dx$$

(*) zbog $\int_{\overset{\frown}{RQ}} P\left(x, y\right) dx = \int_{\overset{\frown}{PS}} P\left(x, y\right) dx = 0$, jer je $dx = 0$.

Pošto se analogno može izvesti da je $J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{L^+} Q(x,y)dy$ sabiranjem integrala I u J dobija se zadato tvrđenje čime je dokaz završen.

1.3 Površinski integrali

1.3.1 Površinski integral I vrste

Definicija 10. (*Definicija površinskog integrala* I *vrste*)
Neka je data površ $S \subset R^3$ koja je *deo po deo glatka* (sastoji se od unije najviše prebrojivo mnogo glatkih površi - površi kod kojih se u svakoj tački, osim u rubnim tačkama, može postaviti tangentna ravan i to na jedinstven način), *ograničena* i *rektificijabilna* (ima konačnu površinu).

Neka je površ S razložena podelom $\mathcal{P}$ na podpovrši: $S_1, S_2, ..., S_n$ tako da važi:

(i) $S_i \subset S,\ i = 1, 2, ..., n$;

(ii) $\bigcup_{i=1}^n S_i = S$;

(iii) $intS_i \cap intS_j = \varnothing$, za $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Na proizvoljan način odaberimo po jednu tačku $M_k = M_k(x_k, y_k, z_k) \in S_k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$. Neka je $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} diam(S_k)$, pri čemu je dijametar skupa S_k definisan sa $diam(S_k) = \sup\limits_{A,B\in S_k} (d(A,B))$. Neka je $f : S \to R$ ograničena funkcija definisana u svim tačkama površi S. Definišimo Darboux-ovu sumu funkcije f po površi S, na sledeći način:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\,(M_k)\, mes(S_k),$$

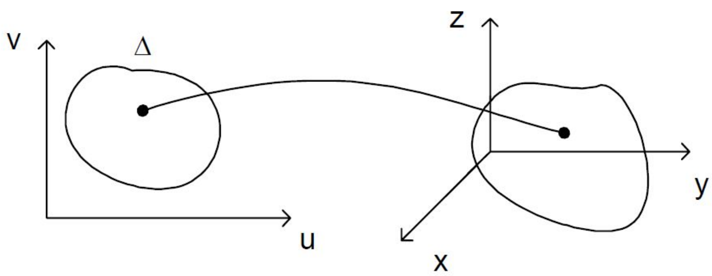
pri čemu je sa $mes(S_k)$ označena površina površi S_k.
Ako postoji konstanta $I \in R$ tako da je $\lim\limits_{\lambda\to 0+} \sigma = I$, odnosno da je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in R)\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall\mathcal{P})\,(\forall M_k \in S_k)\;\; \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

tada broj I nazivamo površinski integral I vrste funkcije f po površi S. Za funkciju f, u tom slučaju, kažemo da je integrabilna po površi S u smislu postojanja površinskog integrala I vrste i pišemo

$$I = \oiint\limits_{S} f(x,y,z)dS.$$

Teorema 1. (*Teorema o izračunavanju površinskog integrala* I *vrste*)
Neka je $S \subset R^3_{x,y,z}$ površ u prostoru R^3 i neka je ova površ jednoznačna slika oblasti $\Delta \subset R^2_{u,v}$, sledećim neprekidno diferencijabilnim funkcijama $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$.



Neka je funkcija f ograničena na površi S. Tada važi sledeća jednakost:

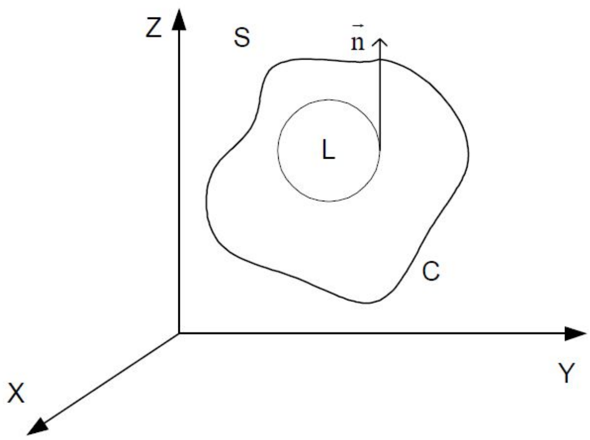
$$\oiint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Delta} f\,(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{E\cdot G - F^2}dudv$$

gde je

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

1.3.2 Jednostrane i dvostrane površi

Pretpostavimo da je data glatka površ $S \subset R^3$, pri čemu je rub ove površi zatvorena kontura C. U proizvoljnoj tački N ove površi povučemo jedinstvenu normalu $\vec{n}$ ($\vec{n} \perp S$) i opišemo konturu $L \subset S$ takvu da je $L \cap C = \emptyset$ i da kontura L sadrži podnožje normale $\vec{n}$.



Pomeramo $\vec{n}$ duž konture L. Mogu nastati dva slučaja:

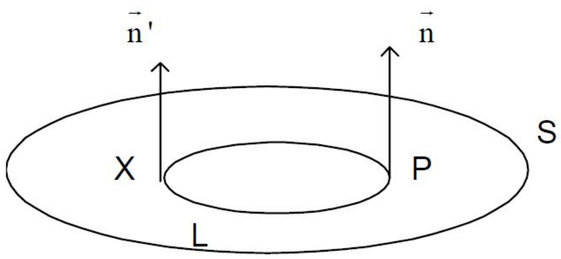
(i) Pomerajući $\vec{n}$ duž konture L, posle povratka u tačku N normala $\vec{n}$ se vraća u polazni položaj zadržavajući isti smer.

(ii) Pomerajući $\vec{n}$ duž konture L, posle povratka u tačku N normala $\vec{n}$ se vraća u polazni položaj menjajući smer u njemu suprotan.

Ako za svaku konturu $L \subset S$ normala zadržava isti smer kao i u početnom položaju za površ S kažemo da je *dvostrana* (na primer, sfera). Ako postoji barem jedna kontura L takva da posle njenog obilaska vektor $\vec{n}$ menja svoj smer za površ S kažemo da je *jednostrana* (na primer, Mebijusov list).

Definicija 11. (*Definicija strane površi*)

Izaberimo na dvostranoj, deo po deo glatkoj, ograničenoj i rektificijabilnoj površi S jednu tačku P i u njoj postavimo normalu $\vec{n}$ ($\vec{n} \perp S$), pri čemu biramo na proizvoljan način i fiksiramo jedan od dva moguća smera. Osim ovoga uočimo proizvoljnu tačku X na S. Za tačku X i tačku P kažemo da pripadaju istoj strani dvostrane površi S ako za svaku konturu L koja sadrži i P i X, ali ne seče granicu od S, normala $\vec{n}$ posle obilaska te konture zadržava isti smer kao i u početnom položaju.



Skup svih tačaka koje pripadaju istoj strani dvostrane površi obrazuju jednu od dve strane te površi. Skup preosalih tačaka obrazuju drugu stranu te površi.

Ukoliko je na površi S izabrana jedna strana površi tada za površ kažemo da je "orijentisana".

1.3.3 Površinski integrali II vrste

Definicija 12. (*Definicija površinskog integrala* II *vrste po Oxy-ravni*)

Neka je površ $S \subset R^3$ *deo po deo glatka*, *ograničena*, *rektificijabilna* (tj. možemo da odredimo površinu površi), *dvostrana* i *orijentisana* (na S je izabrana jedna strana površi označena sa S^*).

Neka je u svakoj taški površi S definisana funkcija $R(x, y, z) : S \to R$ koja je ograničena na S (tj. $(\exists K > 0)(\forall (x, y, z) \in S)\, |R(x, y, z)| \leqslant K$).

Neka je $\mathcal{P}$ podela površi S na orijentisane površi S_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), pri čemu je svaka podpovrš iste orijentacije kao površ S.

Projektujmo S_i na Oxy ravni i neka su $D_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ projekcije površi S_i, čije površine imaju veličinu $mes(D_i)$.

Proizvoljno odaberimo tačke $M_i = M_i(x, y, z) \in S_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$). Neka je dijametar λ podele $\mathcal{P}$, $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} d(S_i)$, gde su $d(S_i)$ dijametri površi S_i. *Darboux*ovu sumu za površinski integral funkcije R po projekciji površi S na xOy ravan definišemo sa:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} R\left(M_i\right) \cdot mes(D_i)$$

gde ima D_i znak $+$, ako je odbarana spoljnja strana, a znak $-$ ako je odabrana unutrašnja strana.

Ako postoji konstanta $I \in R$ tako da je $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \sigma = I$, odnosno da je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in R)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \mathcal{P})\,(\forall M_k \in S_k)\ \ \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$

tada za funkciju R kažemo da je integrabilna po projekciji površi S^* na Oxy-ravan, u smislu postojanja površinskog integrala druge vrste. Broj I nazivamo površinski integral druge vrste po projekciji površi S^* na Oxy-ravan i pišemo

$$I = \iint\limits_{S*} R(x, y, z) dx dy.$$

Napomena. Uobičajeno je da se spoljna strana površi S označava sa S^+, a unutrašnja sa S^-.

Definicija 13. (*Definicija površinskog integrala* II *vrste*) Slično kao u prethodnoj definicija definišemo integrale funkcija $P = P(x, y, z)$ i $Q = Q(x, y, z)$ po projekciji površi S^* na Oyz i Ozx ravni, redom. Tada je sa

$$I = \iint\limits_{S*} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

definisan površinski integral druge vrste po površi S i to onoj strani koja je određena sa $*$.

1.3.4 Veza površinskih integrala prve i druge vrste

Neka je $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ jedinični vektor normale na datu površ S $(\alpha, \beta, \gamma$ su uglovi koje $\vec{n}$ zaklapa sa x,y, z osama). Izdelimo S na veoma male površi, kojima dodeljujemo po vektor $\vec{n}$. Neka je $mes\,(D_i)$ mera površine projekcije površi S_i na Oxy. Tada imamo da je
$\left|\frac{mes(D_i)}{mes(S_i)}\right| = |\cos\gamma_i|$, (odnosno $\frac{dxdy}{dS} = \cos\gamma$), pa je
$mes(D_i) = mes(S_i)\cdot\cos\gamma_i$ (γ_i u izabranoj taki). S obzirom na prethodno, *Darboux*ova suma kojom se definiše integral po xOy ravni postaje

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i \cdot mes(S_i) \Rightarrow \; I = \oiint_S f(x, y, z)\cos\gamma dS.$$

Dakle, važi:

$$(II)\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = (I)\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

1.3.5 Izračunavanje površinskog integrala II vrste

Date su tri funkcije: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, koje jednoznačno preslikavaju $(x, y, z) \in S \underset{"1-1"}{\overset{na}{\Leftrightarrow}} (u, v) \in\triangle\subset R^2$. Vektor standardizovane normale na površ je standardizovan vektor koji se dobija iz vektorskog proizvoda $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$. Označimo koordinate prethodnog vektorskog proizvoda sa $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.
Kako je
$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

a $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$, dobijamo da je:

$$I = (II) \oiint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

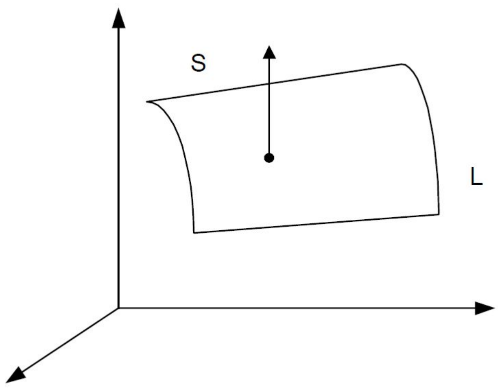
$$= (dvojni) \underbrace{\pm}_{\substack{\text{zavisi od} \\ \text{strane} \\ \text{povrsi}}} \iint_{\triangle} (PA + QB + RC)\, dudv.$$

1.3.6 Stokes-ova formula

Stokes-ova formula predstavlja vezu između površinskog integrala II vrste i krivolinijskog integrala II vrste.

Neka je $S \subset R^3$ prosta (ne seče samu sebe), glatka, dvostrana površ, ograničena deo po deo glatkom konturom L, pri čemu na površi S biramo spoljnu stranu, a na L pozitivnu orijentaciju kretanja. Neka je data funkcija $P = P(x, y, z)$ koja je neprekidna zajedno sa svim svojim prvim parcijalnim izvodima po svim promenljivim x, y, z i to u oblasti $S \cup L$. Pod svim ovim uslovima važi:

(A) $$\int\limits_{L^+} Pdx = \oiint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$



Dokaz : Neka se parametarskim funkcijama $x = x(u,v), y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ površ S jednoznačno preslikava na $\Delta \in R^2_{u,v}$ (pri tome se kontura L preslikava na konturu Λ koja ograničava Δ).

Kako u tom slučaju iz $x = x(u,v) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ imamo da je

$$\int\limits_{L^+} Pdx = \int\limits_{\Lambda*} \left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv.$$

(* označava odgovarajuću orjentaciju koja se dobija projektovanjem krive L^+.)

Prema *Green*ovoj formuli dobijamo da je:

$$\int\limits_{L^+} Pdx = \iint\limits_{\Delta} (\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right))dudv$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right) dudv = \oiint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Pretpostavimo dalje da još uvek važe sve pretpostavke koje se odnose na $S \cup L$, ali da su date još dve funkcije $Q = Q(x,y,z)$ i $R = R(x,y,z)$ koje zadovoljavaju analogne pretpostavke, tada važe i sledeće dve formule:

(B) $$\int\limits_{L^+} Qdy = \oiint\limits_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz \text{ i}$$

(C) $$\int\limits_{L^+} Rdz = \oiint\limits_{S^+} \frac{\partial R}{\partial z}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$$

Iz formula (A), (B) i (C) sledi da važi sledeća jednakost, koja se naziva *Stokes*-ova formula, i koja glasi:

$$\oint\limits_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = (I)\oiint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \oiint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

gde je $\vec{n} = \vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ jedinični vektor normale postavljen na površi S u tački $(x, y, z) \in S$.

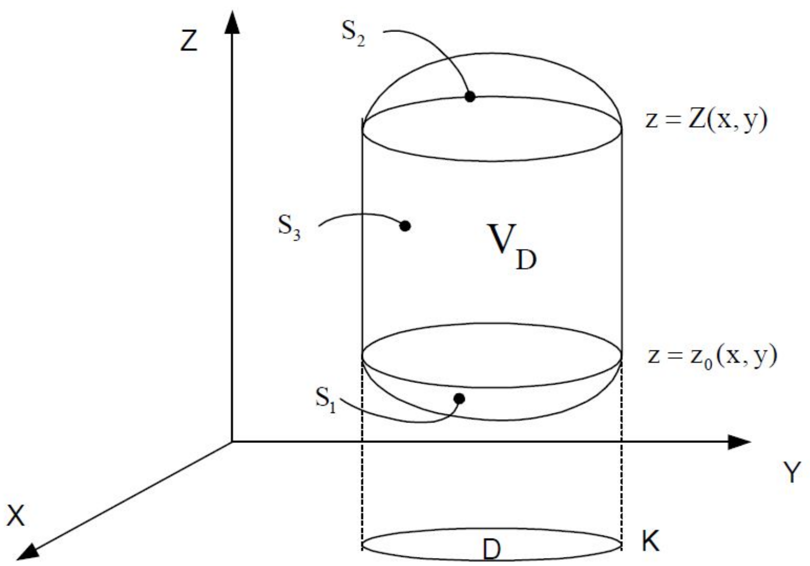
1.3.7 Teorema Gauss – Ostrogradski

Teorema Gauss-Ostrogradski daje vezu između površinkog integrala II vrste i trojnog integrala.

Teorema *Gauss-Ostrogradski.* Neka je V kompaktan (zatvoren i ograničen), povezan skup u R^3, čiji je rub deo po deo glatka površ S. Neka su $P, Q, R : V \to R^3$ neprekidno diferencijabilne funkcije (Dovoljno je da budu neprekidni oni parcijalni izvodi koji učestvuju u formuli.) Tada važi formula *Gauss-Ostrogradskog:*

$$\iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz = \oiint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvršiti za telo koje je dato na slici.



U skladu sa oznakama na crtežu pretpostavimo da su date dve funkcije $S_1 : z = z_0(x, y)$, $S_2 : z = Z(x, y)$, gde je $(x, y) \in D$ i gde je ispunjen sledeći uslov $z_0(x,y) \leqslant Z(x,y)$ za svako $(x,y) \in D$. Površ S_3 je ortogonalna na xOy ravan. Površi S_1, S_2 *i* S_3 su deo po deo glatke površi. Neka je takođe sa S^+ označena spoljna strana površi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Neka je oblast D ograničena konturom K koja je deo po deo glatka.

Imamo da je

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,Z(x,y))dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_0(x,y))dxdy =$$

$$= \oiint\limits_{S_2^+} R(x,y,z)dxdy - \oiint\limits_{S_1^-} R(x,y,z)dxdy$$

$$= \oiint\limits_{S_2^+} R(x,y,z)dxdy + \oiint\limits_{S_1^+} R(x,y,z)dxdy + \left(+ \iint\limits_{S_3^+} R(x,y,z)dxdy = 0 \Big|_{\text{promena dxdy je 0 na } \mathrm{S}_3} \right)$$

$$= \oiint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy.$$

Dakle, dobili smo da važi (I) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_S R(x,y,z)dxdy.$

Analogno se dokazuju sledeće dve veze:

(II) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_S P(x,y,z)dydz$

(III) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_S Q(x,y,z)dzdx$

Sabiranjem (I), (II) i (III) dobijamo formulu Gauss-Ostrogradskog.

1.4 Elementi teorije polja

Definicija 14. (*Definicija skalarnog polja*) Neka je data bilo koja funkcija: $u = u(\vec{r}) : R^3 \to R$. Tada kažemo da je dato skalarno polje. (R^3 razmatramo kao skup vektora.)

Definicija 15. (*Definicija gradijenta*) Ako je $u = u(x, y, z) : R^3 \to R$ skalarno polje i ako postoje parcijalni izvodi u'_x, u'_y, u'_z, tada vektor

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

nazivamo *gradijent skalarnog polja u*.

Definicija 16. (*Definicija vektorskog polja*) Ako su data tri skalarna polja: $P, Q, R : R^3 \to R$, tada ona definišu vektorsko polje $\vec{A} : R^3 \to R^3$ opisano jednakošću

$$\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r}) \cdot \vec{i} + Q(\vec{r}) \cdot \vec{j} + R(\vec{r}) \cdot \vec{k}.$$

Nadalje ćemo smatrati da je vektorsko polje $\vec{A}$ zadato skalarnim poljima P, Q i R, osim ukoliko nije drugačije precizirano.

Definicija 17. (*Definicija fluksa*) Neka je dato vektorsko polje $\vec{A}$. Za broj Φ definisan sledećim povrinškim integralom

$$\Phi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

kažemo da je fluks vektorskog polja $\vec{A}$ kroz površ S.

Definicija 18. (*Definicija divergencije*) Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se skalarno polje:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

naziva divergencija vektorskog polja $\vec{A}$.

Napomena:

Važi da je $\operatorname{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$, gde je operator $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$.

Definicija 19. (*Cirkulacija vektorskog polja*) Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se izraz:

$$\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

naziva cirkulacija vektorskog polja $\vec{A}$ duž krive C.

Definicija 20. (*Definicija rotora*) Ako je $\vec{A}$ vektorsko polje, tada se vektorsko polje:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

naziva rotor vektorskog polja $\vec{A}$.

Napomena:

Važi da je $\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$, gde je operator $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}i + \dfrac{\partial}{\partial y}j + \dfrac{\partial}{\partial z}k$.

1.4.1 Vrste specijalnih polja

Definicija 21. (*Definicija potencijalnog vektorskog polja*) Ako za vektorsko polje $\vec{A}$ postoji skalarno polje u takvo da važi $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, tada se vektorsko polje $\vec{A}$ naziva *potencijalno vektorsko polje.*

Dakle, za potencijalno vektorsko polje $\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r})\cdot\vec{i} + Q(\vec{r})\cdot\vec{j} + R(\vec{r})\cdot\vec{k}$ mora važiti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

, pa će postajati takvo skalarno polje u ako i samo ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

odnosno ako i samo ako je $rot\vec{A} = 0$.

Definicija 22. (*Definicija solenoidnog vektorskog polja*) Ako za vektorsko polje $\vec{A}$ postoji vektorsko polje $\vec{B}$ takvo da važi $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$, tada se vektorsko polje $\vec{A}$ naziva *solenoidno vektorsko polje.*

Vektorsko polje $\vec{A}$ je solenoidno ako i samo ako je $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Klasifikacija vektorskog polja $\vec{A}$:

(i) Potencijalno (bezvrtložno) polje: $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ i $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$.

(ii) Solenoidno (vrtložno) polje: $\operatorname{rot} \vec{A} \neq 0$ i $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

(iii) Laplace-ovo polje $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ i $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

(iv) Složeno polje: $\operatorname{rot} \vec{A} \neq 0$ i $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$.