FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH
Zadaci sa ranijih ispita

1. Odrediti nepoznatu konstantu A tako da funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ A, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

bude neprekidna, a zatim ispitati diferencijabilnost funkcije.

2. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y},\quad x,y,z>0.$$

Rešenje Nije teško proveriti da su parcijalni izvodi funkcije:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y+z}-\frac{y}{(x+z)^2}-\frac{z}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{1}{x+z}-\frac{z}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x}{(y+z)^2}-\frac{y}{(x+z)^2}+\frac{1}{x+y}.$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobijamo sistem jednačina:

$$\frac{(x+y+z)(x+y+2z)(x-y)}{(x+z)^2(y+z)^2}=0$$

$$\frac{(x+y+z)(x+2y+z)(x-z)}{(x+y)^2(y+z)^2}=0$$

$$\frac{(x+y+z)(2x+y+z)(y-z)}{(x+z)^2(x+y)^2}=0,$$

iz koga zbog pozitivnosti koordinata sledi da su kandidati za stacionarne tačke sve tačke za koje je $x=y=z$. Nalaženjem drugih parcijalnih izvoda pokazuje se da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{2x^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{-1}{4x^2},$$

te su to tačke lokalnih minimuma funkcije.

3. Na paraboloidu

$$z = 4 - (x^2 + y^2)$$

odrediti tačku koja ima osobinu da je zapremina tetraedra koga ova tangentna ravan gradi sa koordinatnim ravnima, najmanja.

4. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = xy^2z^3$, pri uslovu $x + 2y + 3z = a$, za $x, y, z, a > 0$.

5 . Odrediti lokalne ekstreme funkcije $z(x, y) = \frac{x+y+p}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ i ispitati njihovu prirodu u zavisnosti od realnog parametra $p \in \mathbf{R}$.

6. Odrediti rastojanje izmedju površi:

$$3x + 4y + 12z = 288 \ \text{ i } \ \frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1.$$

Rešenje Treba naći tačku minimuma LAGRANGEove funkcije za uslovni ekstrem:

$$L(x, y, z; \lambda) = \frac{1}{13}|3x + 4y + 12z - 288| + \lambda(\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1).$$

Lako se pokazuje da je minimum svih rastojanja izmadju tačaka ove dve površi 256/13.

7. Neka je $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ RIEMANN integrabilna funkcija. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije:

$$E(x, y, z) = \int_0^{2\pi} (f(t) - x - y\cos t - z\sin t)^2 \, dt.$$

Rešenje. Kako je podintegralna funkcija R-integrabilna sa znakom izvoda može se ući pod integral, te primenjujući LEIBNITZovu formulu dobijamo da je:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\, dt + 4\pi x,$$
$$\frac{\partial E}{\partial y} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt + 2\pi y,$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -2\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt + 2\pi z.$$

Izjednačavanjem ovih parcijalnih izvoda sa nulom dobijamo da je stacionarna tačka:

$$M(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt).$$

Kako su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki nuli i kako je

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 4\pi,\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 2\pi,\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 2\pi,$$

tada je druga kvadratna forma pozitivno definitna, te je u tački M minimum.

8. Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije

$$z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2},$$

na njenom domenu.

9. Odrediti tačku na elipsoidu $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$, koja ima najkraće rastojanje od ravni $x + y + z = 4$.

10. U zavisnosti od realnog parametra a ispitati diferencijabilnost funkcije:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sqrt{(x^2+y^2)}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq 0 \\ a, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

u tački $(0,0)$.